

陈建和⊙著

论不定方程

湖南师范大学出版社



论不定方程

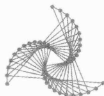
责任编辑　廖小刚
装帧设计　周基东



定价：28.00元

陈建和⊙著

论不定方程



湖南师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

论不定方程／陈建和著．—长沙：湖南师范大学出版社，2013.5
ISBN 978－7－5648－1149－5

Ⅰ.①论…　Ⅱ.①陈…　Ⅲ.①不定方程　Ⅳ.①O122.2
中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第067918号

论不定方程

陈建和　著

◇责任编辑：廖小刚
◇责任校对：刘亮前
◇出版发行：湖南师范大学出版社
地址/长沙市岳麓山　邮编/410081
电话/0731.88853867　88872751　传真/0731.88872636
网址/http://press.hunnu.edu.cn
◇经销：湖南省新华书店
◇印刷：长沙市宏发印刷有限公司
◇开本：787 mm×1092 mm　1/16
◇印张：8
◇字数：150千字
◇版次：2013年5月第1版第1次印刷
◇书号：ISBN 978－7－5648－1149－5
◇定价：28.00元

序　　言

数学是科学中最精准的语言.

引力定律:$F=G\frac{Mm}{R^2}$,质能方程:$E=mc^2$,欧拉等式:$e^{i\pi}+1=0$.

数学是科学中最普遍的工具.

“在我的一生中,还没有如此勤奋地工作过,我已沉湎于数学的伟大,直到今天,我一直在领略数学微妙部分的纯正的高贵.”年轻的物理学家借用同样年轻的非欧几何建立了广义相对论之后,写下了他内心深处对数学的感受.

数学有许多的分支,几何、代数、拓扑、微分方程等,但唯有数论,未解决的问题比已经解决的问题多得多.数论研究的对象是数,主要是自然数.自然数,是远古的人们对自然世界数量的感知,是数学巨人自身的胚胎,也是每个现代人童年科学知识的启蒙.克罗内克的“上帝创造自然数”可以作为一种诠释.由自然数到小数,由有理数到无理数,由正数到负数,由实数到虚数,人类对数的认识由感性认识上升到理性认识.不定方程是数论的一个重要部分.高斯在1816年给他的朋友的信中写道:“我的确承认,费马大定理作为一个孤立的命题对我没有多少兴趣,因为可以容易地提出许多那样的命题,人们既不能证明它也不能否定它.”经过漫长的三百年,通过

许多数学家的努力,怀尔斯最终完成了对费马大定理的证明,那是人类理性的光辉.

费马大定理是关于三个未知数的不定方程,人们自然地要问四个未知数和四个以上未知数的不定方程.欧拉留下了关于任意个未知数的猜想:

$x_1^n+x_2^n+\cdots+x_{m-1}^n=x_m^n$, $m\in\mathbf{N}$, $n\in\mathbf{N}$, $m\geqslant 3$,当 $n<m$ 时,不定方程有正整数解,当 $n\geqslant m$ 时,不定方程没有正整数解.

这本书是关于不定方程的.

莱布尼兹认为:"了解重大发现,特别是那些决非偶然的,经过深思熟虑而得到的重大发现的真正起源,是极为有益的."建立微积分,莱布尼兹这样写道:"我终于发现了代数学对超越量的推广,也就是我的无限小算法,它包括了微分以及求和,它一旦被发现,所有这类我绞尽脑汁的问题,似乎都变成了儿童的游戏."古代的中国,求出球的体积,付出了几代数学家的努力,现代用微积分,几分钟就可求出球的体积.下面再引用伯努利的一段话:"由此可见,布里亚杜编纂的大部头著作《无穷算术》是多么的劳而无功.他在该书中花了九牛二虎之力才算出的前六次幂之和,只不过是我用一页纸就能完成的工作的一部分而已."不同的数学工具,处理同样的问题,有着截然不同的效率,这也是可以理解的.举一个另类的例子.哥伦布发现新大陆,当时要把这个消息送至欧洲,需要几个月,而现在几分钟够了,船送信息和电磁波发射信息,不同的工具,那效率不可同日而语.技术的进步和知识的创新,使我们有更多的选择,这也是人类文明进步的一个最重要的推动力.

我们知道,老虎、狮子和大象是不同的,各有其特性,但在生物学家的眼里,它们与树和花草是有共性的,它们都是生物,在动物学家看来,它们同马和牛更是有共性的,它们都是动物,而且都是哺乳动物.海水、沙子、游

鱼,物理学家认为,它们和自然界的一切物质一样,都是由基本的微观粒子组成,这就是它们的共性,也是一切物质世界的共性.一个三角形,一个四边形,一个圆,一个三棱柱,一个正方体,一个球体,对数学家而言,它们是有共性的,都可以"微",都可以"积".牛顿和莱布尼兹建立微积分,就是因为他们抓住了事物的共性,抽象出了一般的理论.微积分可以求面积,不管是什么曲线封闭而成的面积;微积分可以求体积,不管是什么曲面封闭而成的体积.人们的直觉可以得到正方体和长方体的体积公式,但人们的直觉不可能得到球的体积公式.

在微观世界里,许多的粒子都有它的反粒子,电子的反粒子就是正电子,它是狄拉克预言的,安德森发现的,这是物理学家最早发现的正反粒子对.在数学里,有正数和负数.粒子和反粒子,正数和负数,它们是对立的,也是统一的.自然世界有确定性的一面,也有不确定性的一面,它们是对立的,也是统一的.在数学世界里,是不是只有确定性的一面呢? M·克莱因的名著《数学,确定性的丧失》值得一读.

前面提到的欧拉的猜想,体现了"统一"这一深刻思想.只要指数小于未知数的个数,方程就有解,至于指数是2,是3,还是任意其他自然数,都是一样的.自然世界有四种基本的力:电磁力、弱相互作用、强相互作用和万有引力.除引力外,物理学家已经尝试把三种基本力统一起来,这是物理学家追求"统一"思想的生动的体现.古希腊的哲学家认为,物质都是由原子构成的,是一种朴素的"统一"思想.不定方程,是不是可以"统一"起来加以研究呢?

抓住不定方程的共性,抽象出一般的理论,然后用理论来处理一般性的问题.现有的理论关于不定方程所获得的定性的结果以及定量的结果,新的数学理论可以获得同样的结果,不定方程中大部分的不定方程,现有

的数学理论不能处理,但新的数学理论可以处理它们,不但可以求整数解,还可以求不定方程的有理数解.这是作者写这本书的主要原因.

数学的真理同科学的其他真理一样,是客观存在的,人们可以发现它,理解它,检验它,运用它.数学的真理并不是人们创造出来的.哈密顿说过"数学是人类思想的自由创造."我虽然不完全同意这一观点,但还是用它作为我写下这本书的另一个理由.思考是人类的共性,也是人类区别于万物的特性."一条鱼能对它终身畅游其中的水知道些什么?"

写到这里,窗外夕阳西下,偌大的湖面,波光粼粼,苍茫的远山,沐浴着天际的晚霞,浮想起古代思想家庄子的一句名言"判天地之美,析万物之理."

作者

2013 年 1 月 18 日

目 录

第一章　一元 n 次方程

一元一次方程，非常容易得到求根公式，一元二次方程的求根公式也不难，一元三次方程和一元四次方程的求根公式，就非常难了，但还是被 16 世纪的数学家找到. 五次或五次以上的的代数方程的求根公式，在 16 世纪后的两百多年里，数学家付出了巨大的努力，但都无一例外的失败了. 拉格朗日（Lagrange）在 1770 年发表了 200 多页的论文《关于代数方程解法的思考》，他正确地指出根的置换（或排列）的理论是解代数方程的关键所在，或借用他自己的话来说是"整个问题的真正哲学". 19 世纪伽罗瓦（Galois）的新理论，找到了"整个问题的真正哲学".

一、一元 n 次方程

1. 一元一次方程 $ax+b=0(a\neq 0)$

$x=-\frac{b}{a}$.

2. 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$

韦达（Viete）给出了一个求根公式，$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

3. 一元三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq 0)$

将 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 转化为 $x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$，令 $\frac{b}{a}=r,\frac{c}{a}=s,\frac{d}{a}=t$，得 $x^3+rx^2+sx+t=0$. 设 $x=y-\frac{r}{3}$，$(y-\frac{r}{3})^3+r(y-\frac{r}{3})^2+s(y-\frac{r}{3})+t=0$，将此式转化为 $y^3+(s-\frac{r^2}{3})y+(t+\frac{2r^3}{27}-\frac{rs}{3})=0$. 令 $s-\frac{r^2}{3}=p,t+\frac{2r^3}{27}-\frac{rs}{3}=q$，我们得到方程 $y^3+py+q=0$. 令 $y=z-\frac{p}{3z}$，$z^3-\frac{p^3}{27z^3}+q=0$，变换为 $z^6+qz^3-\frac{p^3}{27}=0$. $z^3=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$. 注意到 $\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\times\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=-\frac{p}{3}$，即可得到著名的卡丹(Cardano)公式. 不过，卡丹公式是由塔塔里亚(Tartaglia)最早发现的.

卡丹公式：$y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$.

当 $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$ 时，卡丹公式只能以虚数根式求解，对于此种不可约情形，韦达对方程给出了新的求根公式.

$x_1=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\alpha$，$x_2=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos(\alpha+120°)$，$x_3=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos(\alpha+240°)$，其中 α 由下式确定，$\cos 3\alpha=-\frac{q}{2}\div\sqrt{-\frac{p^3}{27}}$，$\alpha$ 在 0°到 60°之间.

一元三次方程有三个根，有可能都是实数根，也有可能是一个实数根和两个互为共轭的复数根. 不过，16 世纪的数学家还没有虚数的概念.

4. 一元四次方程 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0(a\neq 0)$

一元四次方程由费拉里(Ferrari)解决. 方法是将一元四次方程化为两

个一元二次方程与一个一元三次方程求解.

5. 一元五次以上方程

拉格朗日发现不能用求一元二次方程、一元三次方程、一元四次方程的方法来求解一元五次和一元五次以上的代数方程.

鲁菲尼(Ruffini)-阿贝尔(Abel)定理:一般地,五次和五次以上的代数方程是不可能由代数根式求解.

伽罗瓦(Galois)建立了一般的理论:五次和五次以上方程代数可解的判别准则.伽罗瓦为群论奠定了基础.群论在物理学中被用来研究对称性.

二、一元 n 次方程与无理数和超越数

$\sqrt{2}$是无理数,也是一元二次方程 $x^2=2$ 的一个根.

希伯索斯(Hippasus)发现了$\sqrt{2}$是无理数,毕达哥拉斯(Phthagoras)学派却信奉万物皆有理数.无理数的出现被视为数学史上的第一次危机.事实上,这并非数学的危机,而是数学的机遇,找到了有理数的对立面"无理数".所谓的危机,只是信仰遇到了危机.

是不是所有的无理数都是代数方程的根呢?

埃尔米特(Hermite)巧妙地证明了 e 不是一元 n 次方程的根,从而证明了 e 是超越数.接下来,林德曼(Linderman)也巧妙地证明了 π 是超越数.

$\sqrt{2}$是无理数,可用反证法,同样的方法可以证明$\sqrt{2}+\sqrt{3}$,$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$是无理数,但不可用来证明$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$也是无理数,为什么?

设$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}=\frac{p}{q}$,$(p,q)=1$，$p,q\in\mathbf{N}$.

$(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7})^2=\frac{p^2}{q^2}$,(A)

$(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2=(\frac{p}{q}-\sqrt{7})^2$,(B)

$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=(\frac{p}{q}-\sqrt{7}-\sqrt{5})^2$,(C)

$(\sqrt{2})^2=(\frac{p}{q}-\sqrt{7}-\sqrt{5}-\sqrt{3})^2$,(D)

不难看出,(A)、(B)、(C)、(D)四式两边平方之后含根号的项分别为6,4,4,6,不比$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$的四项少,因此,用这种方法证明$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$ 是无理数是行不通的.

下面利用一元 n 次方程证明:

$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}+\cdots+\sqrt{n}$为无理数,$n\in\mathbf{N}$,为非平方数.

证明:$x=\sqrt{2}$,$x^2=2$, (A),$x_1=\sqrt{2}$,$x_2=-\sqrt{2}$.

设$(x-\sqrt{3})^2=2$,我们有 $x_1=\sqrt{2}+\sqrt{3}$,$x_2=-\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

$(x-\sqrt{3})^2=2$ 可以化为$\sqrt{3}=\frac{x^2+1}{2x}$.

方程两边平方有$(\sqrt{3})^2=(\frac{x^2+1}{2x})^2$,整理得 $x^4-10x^2+1=0$,(B),$x_1=\sqrt{2}+\sqrt{3}$,$x_2=-\sqrt{2}+\sqrt{3}$,$x_3=-\sqrt{2}-\sqrt{3}$,$x_4=\sqrt{2}-\sqrt{3}$为方程(B)的四个根.

设$(x-\sqrt{5})^4-10(x-\sqrt{5})^2+1=0$,我们有 $x_1=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$,$x_2=-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$,$x_3=-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}$,$x_4=\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

将$(x-\sqrt{5})^4-10(x-\sqrt{5})^2+1=0$ 转化为$\sqrt{5}=\frac{x^4+20x^2-24}{4x^3-16x}$,(C),进

一步转化为 $x^8-40x^6+352x^4-960x^2+576=0$，(D)

$x_1=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$，$x_2=-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$，$x_3=-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}$，$x_4=\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}$为方程(D)的根. $-x_1$，$-x_2$，$-x_3$，$-x_4$也为方程(D)的根.

$x_1=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$为方程(D)的最大实数根，$x_5=-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}$ 为方程(D)的最小实数根.

下面证明$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$为无理数.

在方程(D)的基础上建立方程(E).

$(x-\sqrt{7})^8-40(x-\sqrt{7})^6+352(x-\sqrt{7})^4-960(x-\sqrt{7})^2+576=0$，(E)

由(D)知方程(E)的最大实数根为$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$.

$-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{7}$为方程(E)的最小实数根.

将方程(E)改写为 $x^8+156x^6-418x^4-5972x^2-215=\sqrt{7}(8x^7+152x^5-1448x^3-1080x)$，(F)

由方程(F)可以看出，如果方程两边不为零，x 的任何实数根都不可能为有理数，否则方程(F)的左边为有理数，右边为无理数.

下面证明方程(F)的两边不能为零.

若 $8x^7+152x^5-1448x^3-1080x=0$，(G)

方程(F)的左边也必须为零.

于是有 $x^8+156x^6-418x^4-5972x^2-215=0$，(H)

$f(x)=8x^7+152x^5-1448x^3-1080x$ 为奇函数.

$g(x)=x^8+156x^6-418x^4-5972x^2-215$ 为偶函数.

对于方程(F)的根，我们有 $f(x)=-f(-x)=0$，$g(x)=g(-x)=0$.

方程(F)可以改写为 $g(-x)-\sqrt{7}f(-x)=0$，(I)

(I)可进一步变换为下式：

$(-x-\sqrt{7})^8-40(-x-\sqrt{7})^6+352(-x-\sqrt{7})^4-960(-x-\sqrt{7})^2+576=0$.

因为 $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$ 为有理数，有 $8x^7+152x^5-1448x^3-1080x=0$，则 $x=-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{7}$ 也为方程(E)的根，显然与方程(E)的最小实数根为 $-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{7}$ 矛盾，由此知方程(F)的两边不能为零. 我们得到结果 $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$ 为无理数，当然，方程(F)的其他七个根也为无理数.

显然用上面的方法可以得到一般的结论：

$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}+\cdots+\sqrt{n}$ 为无理数，$n\in\mathbf{N}$，为非平方数.

对于无理数和超越数，康托尔(Cantor)给出了一个重要的结论：无理数比有理数多得多，超越数比代数数多得多.

下面利用康托尔这一结论推出一个新的结论.

结论Ⅰ：小数点后，由 0 到 9 十个数字构成的超越数比由一个数字，两个数字，直至九个数字所构成的超越数之和要多得多.

说明：小数点后由两位数字组成的超越数是指小数点后的每位数字，要么是 a，要么是 b，而 a 和 b 是 0 至 9 中两个不同的数字. 例如最简单的刘维尔(Liouville)数 $\sum_{n=1}^{+\infty}10^{-n!}=0.110001000000000000000000010\cdots$，便是小数点后由两位数字 0 和 1 组成的超越数. 其余类似.

对于这个结论，给出一个简单的推导：

任何一个超越数，小数点后必定有无穷位.

任何一个代数无理数，小数点后必定有无穷位.

任何一个有无限循环位的有理数，小数点后必定有无穷位.

下面讨论小数点后 m 位的情形.

由 0 至 9 十个数字中的一个来填小数点后 m 位，仅给出 C_{10}^1个组合.

由 0 至 9 十个数字中的二个来填小数点后 m 位，给出 $C_{10}^2\times 2^m$ 个组合.

由 0 至 9 十个数字中的三个来填小数点后 m 位，给出 $C_{10}^3\times 3^m$ 个组合.

依次类推，由 0 至 9 十个数字中的十个来填小数点后 m 位，给出 $C_{10}^{10}\times 10^m$ 个组合.

下面来考察一个极限值.

$S_m=C_{10}^1+C_{10}^2\times 2^m+C_{10}^3\times 3^m+\cdots+C_{10}^8\times 8^m+C_{10}^9\times 9^m$，

$L_m=C_{10}^{10}\times 10^m=10^m$，

$K_m=\dfrac{S_m}{L_m}$

取 $m=10$，得 $K_{10}\approx 13.2$，取 $m=20$，得 $K_{20}\approx 1.8$，取 $m=30$，得$K_{30}\approx 0.48$，取 $m=40$，得 $K_{40}\approx 0.15$，取 $m=50$，得 $K_{50}\approx 0.052$.

显然有 $\lim\limits_{m\to+\infty}K_m=0$.

由于康托尔证明了无理数比有理数，超越数比代数数多得多，因此，由上推知由 0 至 9 十个数字组成的超越数比由两个数字、三个数字，直至九个数字组成的超越数之和要多得多. 正因为如此，超越数 π、e 有 0 到 9 十个数字是很自然的. 至于 0 到 9 等概率出现的超越数比 0 到 9 非等概率出现的超越数要多得多，作为一个问题留给读者.

第二章　二元二次方程的参数解及解数分布规律

二元二次不定方程，是最简单的不定方程. $x^2-ny^2=1$，佩尔(Pell)方程是一类研究得较多的二元二次不定方程. 通过找到不同类型的二元二次不定方程的参数解而进一步揭示解数的分布规律.

一、不定方程 $x^2=Dy^2-1$

$x^2=Dy^2-1,D\in\mathbf{N}$，不为完全平方数. 下面求 $D=2,3,5,6,7,8,10$ 方程的解数分布规律. 以下方程仅讨论正整数解，不另作说明.

1. $x^2=2y^2-1$

不定方程 $x^2=2y^2-1$ 的解为 $x_{n+1}=4y_n+3x_n$，$y_{n+1}=3y_n+2x_n$. $x_1=1$，$y_1=1$.

设 x 不超过正整数 m 的解数为 $N(m)$，

$$N(m)\sim\frac{\ln m}{\ln(3+2\sqrt{2})}，\lim_{m\to+\infty}\frac{N(m)}{\ln m}=\frac{1}{\ln(3+2\sqrt{2})}.$$

证明：$x^2=2y^2-1$，令 $x=y+a,a\in\mathbf{Z}$，显见 $a\geqslant 0$.

$(y+a)^2=2y^2-1$，可以改写为 $y^2-2ay-(a^2+1)=0$，方程的两个根为：

$$y=\frac{2a\pm\sqrt{(2a)^2+4(a^2+1)}}{2}=a\pm\sqrt{2a^2+1}.$$

因 y 为正整数，仅取 $y=a+\sqrt{2a^2+1}$.

令 $2a^2+1=E^2$，$E\in\mathbf{N}$，又设 $E=a+b$，显见 $b>0$，$2a^2+1=(a+b)^2$，$2a^2+1=a^2+2ab+b^2$，$a^2-2ba+1-b^2=0$，(A)

由(A)得 $a=\dfrac{2b\pm\sqrt{(2b)^2-4(1-b^2)}}{2}=b\pm\sqrt{2b^2-1}$.

由于 $b>0$，$a\geqslant0$，取 $a=b+\sqrt{2b^2-1}$，显见 $x_1=1$，$y_1=1$ 是方程 $x^2=2y^2-1$ 的解.

令 $b=y_n$，则 $a=y_n+x_n$，$E=2y_n+x_n$，$E=a+b$，$E=y_n+y_n+x_n$.

$y=a+E=2y_n+x_n+y_n+x_n=3y_n+2x_n$，

$x=y+a=3y_n+2x_n+y_n+x_n=4y_n+3x_n$.

由 $x_{n+1}=4y_n+3x_n$，$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=4\dfrac{y_n}{x_n}+3$，$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{y_n}{x_n}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=2\sqrt{2}+3$.

设 x 不超过足够大的正整数 m 的解数为 $N(m)$，

$\ln(3+2\sqrt{2})^{N(m)}\sim\ln m$，得：

$$N(m)\sim\frac{\ln m}{\ln(3+2\sqrt{2})},\ \lim_{m\to+\infty}\frac{N(m)}{\ln m}=\frac{1}{\ln(3+2\sqrt{2})}.$$

下面对方程的解的另一种表达方法给出推导.

$$\begin{aligned}x_{n+2}&=4y_{n+1}+3x_{n+1}\\&=4(3y_n+2x_n)+3x_{n+1}\\&=12y_n+8x_n+3x_{n+1}\\&=3(4y_n+3x_n)-x_n+3x_{n+1}\\&=3x_{n+1}-x_n+3x_{n+1}\\&=6x_{n+1}-x_n,\end{aligned}$$

有 $x_1=1, x_2=7$.

$$\begin{aligned} y_{n+2} &= 3y_{n+1}+2x_{n+1} \\ &= 3y_{n+1}+2(4y_n+3x_n) \\ &= 3y_{n+1}+8y_n+6x_n \\ &= 3y_{n+1}+3(3y_n+2x_n)-y_n \\ &= 3y_{n+1}+3y_{n+1}-y_n \\ &= 6y_{n+1}-y_n, \end{aligned}$$

有 $y_1=1, y_2=5$.

根据递推公式,可以得到:$x_2=7, y_2=5$;$x_3=41, y_3=29$;$x_4=239, y_4=169$;$x_5=1393, y_5=985$;$x_6=8119, y_6=5741$.

下面给出解的第三种表达方式:

$x_n+\sqrt{2}y_n=(\sqrt{2}+1)^{2n-1}$.

$n=1, x_1+\sqrt{2}y_1=1+\sqrt{2}, x_1=1, y_1=1$.

$n=2, x_2+\sqrt{2}y_2=(1+\sqrt{2})^3=7+5\sqrt{2}, x_2=7, y_2=5$.

$n=3, x_3+\sqrt{2}y_3=(1+\sqrt{2})^5=41+29\sqrt{2}, x_3=41, y_3=29$.

我们可以看到,第三种具体求解比较麻烦,涉及二项式定理,用前面的两种方法比较简捷.

2. $x^2=3y^2-1$

不定方程 $x^2=3y^2-1$ 没有正整数解.

证明:由 $x^2=3y^2-1$ 得 $x^2+1=3y^2$,x 不能被 3 整除,如果 x 不被 3 整除,必有 x^2-1 被 3 整除,由 $x^2-1+2=3y^2$ 知这是不可能的,方程无解.

下面给出另外一种证法.

证明:A. 若 y 为奇数,则 x 必为偶数,$x^2=3y^2-1$ 可化为 $x^2=2y^2+y^2$

$-1,4|x^2,4|(y^2-1),2y^2$ 不能被 4 整除,故 y 为奇数无解.

B. 若 y 为偶数,则 x 必为奇数,$x^2=3y^2-1$ 可化为 $x^2+1=3y^2$,而 x^2+1 不能被 4 整除,$4|3y^2$,故 y 为偶数无解.

3. $x^2=5y^2-1$

不定方程 $x^2=5y^2-1$ 的解为 $x_{n+1}=20y_n+9x_n, y_{n+1}=9y_n+4x_n, x_1=2, y_1=1$. 设 x 不超过正整数 m 时,方程的解数为 $N(m)$,

$$N(m)\sim\frac{\ln m}{\ln(9+4\sqrt{5})},\lim_{m\to+\infty}\frac{N(m)}{\ln m}=\frac{1}{\ln(9+4\sqrt{5})},$$

方程的解也可表示为:

$x_{n+2}=18x_{n+1}-x_n, x_1=2, x_2=38.$

$y_{n+2}=18y_{n+1}-y_n, y_1=1, y_2=17.$

证明:设 $x=2y+a, a\in\mathbf{Z}, a\geqslant 0.$

$(2y+a)^2=5y^2-1, y^2-4ay-(1+a^2)=0,$

$$y=\frac{4a\pm\sqrt{(4a)^2+4(1+a^2)}}{2}=2a\pm\sqrt{5a^2+1}.$$

只考虑正整数解,取 $y=2a+\sqrt{5a^2+1}$,令 $5a^2+1=D^2$,令 $D=2a+b$, $5a^2+1=(2a+b)^2, a^2-4ab+1-b^2=0$,方程解为

$$a=\frac{4b\pm\sqrt{(4b)^2-4(1-b^2)}}{2}=2b\pm\sqrt{5b^2-1}.$$

只取正整数解,$a=2b+\sqrt{5b^2-1}$,取 $b=y_n, \sqrt{5b^2-1}=x_n, a=2y_n+x_n, D=2a+b=5y_n+2x_n, y=2a+D=9y_n+4x_n, x=2y+a=20y_n+9x_n, x_1=1, y_1=1.$

这样,$x^2=5y^2-1$ 的通解为

$x_{n+1}=20y_n+9x_n, y_{n+1}=9y_n+4x_n, x_1=1, y_1=1.$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{20y_n}{x_n}+9=9+4\sqrt{5}.$$

设不超过正整数 m 的解数为 $N(m)$，$\ln(9+4\sqrt{5})^{N(m)}\sim\ln m$.

$$N(m)\sim\frac{\ln m}{\ln(9+4\sqrt{5})},\lim_{m\to+\infty}\frac{N(m)}{\ln m}=\frac{1}{\ln(9+4\sqrt{5})}.$$

$$\begin{aligned}x_{n+2}&=20y_{n+1}+9x_{n+1}\\&=20(9y_n+4x_n)+9x_{n+1}\\&=9(20y_n+9x_n)-x_n+9x_{n+1}\\&=9x_{n+1}-x_n+9x_{n+1}\\&=18x_{n+1}-x_{n+1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_{n+2}&=9y_{n+1}+4x_{n+1}\\&=9y_{n+1}+4(20y_n+9x_n)\\&=9y_{n+1}+9(9y_n+4x_n)-y_n\\&=9y_{n+1}+9y_{n+1}-y_n\\&=18y_{n+1}-y_n.\end{aligned}$$

4. $x^2=6y^2-1$

不定方程 $x^2=6y^2-1$ 无正整数解.

证明：A. 若 $3|x$，而 $6y^2-1$ 不能被 3 整除，无正整数解.

B. 若 x 不能被 3 整除，而 $3|(x^2-1)$，$6y^2-2$ 不能被 3 整除，无正整数解.

5. $x^2=7y^2-1$

不定方程 $x^2=7y^2-1$ 无正整数解.

证明：A. 若 x 为偶数，则 y 必为奇数，$7y^2-1=6y^2+y^2-1$，$4|x^2$，$4|$

(y^2-1)，$6y^2$ 不能被 4 整除. 无正整数解.

B. 若 x 为奇数，则 y 必为偶数，$x^2+1=7y^2$，x^2+1 不被 4 整除，$4|7y^2$.

由 A 和 B 知，方程无正整数解.

6. $x^2=8y^2-1$

不定方程 $x^2=8y^2-1$ 无正整数解.

证明：由 $x^2=8y^2-1$ 知 x 为奇数，$x^2+1=8y^2$，x^2+1 不能被 4 整除，故方程没有正整数解.

7. $x^2=10y^2-1$

不定方程 $x^2=10y^2-1$ 的解为 $x_{n+1}=60y_n+19x_n$，$y_{n+1}=19y_n+6x_n$，$x_1=3$，$y_1=1$.

设 x 不超过正整数 m 时，方程的解数为 $N(m)$，

$$N(m)\sim\frac{\ln m}{\ln(6\sqrt{10}+19)},\lim_{m\to+\infty}\frac{N(m)}{\ln m}=\frac{1}{\ln(6\sqrt{10}+19)}.$$

不定方程的解也可表示为：

$x_{n+2}=38x_{n+1}-x_n$，$x_1=3$，$x_2=117$.

$y_{n+2}=38y_{n+1}-y_n$，$y_1=1$，$y_2=37$.

证明：令 $x=3y+a$，$a\in\mathbf{Z}$，$a\geqslant 0$. $(3y+a)^2=10y^2-1$，$y^2-6ay-(a^2+1)=0$，$y=\frac{6a\pm\sqrt{(6a)^2+4(1+a^2)}}{2}=3a\pm\sqrt{10a^2+1}$，正整数解取 $y=3a+\sqrt{10a^2+1}$. 令 $10a^2+1=D^2$，$D\in\mathbf{N}$，设 $D=3a+b$，$10a^2+1=(3a+b)^2$，$a^2-6ba+1-b^2=0$，得方程的解为：

$$a=\frac{6b\pm\sqrt{(6b)^2-4(1-b^2)}}{2}=3b\pm\sqrt{10b^2-1}.$$

$a\geqslant 0$，取 $a=3b+\sqrt{10b^2-1}$，令 $b=y_n$，$\sqrt{10b^2-1}=x_n$，$a=3y_n+x_n$，由 $D=3a+b$，得 $D=10y_n+3x_n$，$y=3a+D=19y_n+6x_n$，$x=3y+a=60y_n+x_n$.

方程通解为：

$x_{n+1}=60y_n+19x_n$，$y_{n+1}=19y_n+6x_n$，$x_1=3$，$y_1=1$.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to+\infty}60\frac{y_n}{x_n}+19=19+6\sqrt{10}.$$

设 x 不超过正整数 m 的解数为 $N(m)$，$\ln(19+6\sqrt{10})^{N(m)}\sim\ln m$.

$$N(m)\sim\frac{\ln m}{\ln(19+6\sqrt{10})},\ \lim_{m\to+\infty}\frac{N(m)}{\ln m}=\frac{1}{\ln(19+6\sqrt{10})}.$$

以下是通解的另外一种表达方式.

$$\begin{aligned}x_{n+2}&=60y_{n+1}+19x_{n+1}\\&=60(19y_n+6x_n)+19x_{n+1}\\&=19(60y_n+19x_n)-x_n+19x_{n+1}\\&=19x_{n+1}-x_n+19x_{n+1}\\&=38x_{n+1}-x_n,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_{n+2}&=19y_{n+1}+6x_{n+1}\\&=19y_{n+1}+6(60y_n+19x_n)\\&=19y_{n+1}+19(19y_n+6x_n)-y_n\\&=19y_{n+1}+19y_{n+1}-y_n\\&=38y_{n+1}-y_n.\end{aligned}$$

二、不定方程 $x^2=Dy^2-(D-1)$

下面来讨论不定方程 $x^2=Dy^2-(D-1)$的参数解及解数分布规律，其中 D 不为完全平方数. 下面仅讨论 $D=2、3、5、6、7、8$ 的情形. 读者不难发现，不定方程 $x^2=Dy^2-(D-1)$有一组正整数解 $x=1,y=1$.

1. $x^2=2y^2-1$

相关结果见本章第一节.

2. $x^2=3y^2-2$

不定方程 $x^2=3y^2-2$ 的解为 $x_{n+1}=3y_n+2x_n$，$y_{n+1}=2y_n+x_n$，x 不超过正整数 m 时的解数为 $N(m)$，$N(m)\sim\frac{\ln m}{\ln(2+\sqrt{3})}$，$\lim\limits_{m\to+\infty}\frac{N(m)}{\ln m}=\frac{1}{\ln(2+\sqrt{3})}$.

方程的解也可表示为：

$x_{n+2}=4x_{n+1}-x_n$，$x_1=1$，$x_2=5$

$y_{n+2}=4y_{n+1}-y_n$，$y_1=1$，$y_2=3$

证明：令 $x=2y-a$，$a\in\mathbf{Z}$，显见 $a>0$.

$(2y-a)^2=3y^2-2$，$y^2-4ay+a^2+2=0$，$y=2a\pm\sqrt{3a^2}$，

$y=2a-\sqrt{3a^2-2}$ 时，$x=2y-a=2(2a-\sqrt{3a^2-2})-a=3a-2\sqrt{3a^2-2}$.

$a\geqslant2$ 时，仅取 $y=2a+\sqrt{3a^2-2}$，令 $a=y_n\sqrt{3a^2-2}=x_n$，$y=2y_n+x_n$.

$x=2y-a$，$x=3y_n+2x_n$，$x^2=3y^2-2$ 的参数解为 $x_{n+1}=3y_n+2x_n$，$y_{n+1}=2y_n+x_n$，$x_1=1$，$y_1=1$.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to+\infty}3\frac{y_n}{x_n}+2=2+\sqrt{3}.$$

设 x 不超过正整数 m 的解数为 $N(m)$，$\ln(2+\sqrt{3})^{N(m)}\sim\ln m$.

$$N(m)\sim\frac{\ln m}{\ln(2+\sqrt{3})},\lim_{m\to+\infty}\frac{N(m)}{\ln m}=\frac{1}{\ln(2+\sqrt{3})}.$$

$$\begin{aligned}x_{n+2}&=3y_{n+1}+2x_n\\&=3(2y_n+2x_n)+2x_{n+1}\\&=2(3y_n+2x_n)-x_n+2x_{n+1}\\&=2x_{n+1}-x_n+2x_{n+1}\\&=4x_{n+1}-x_n,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_{n+2}&=2y_{n+1}+x_{n+1}\\&=2y_{n+1}+3y_n+2x_n\\&=2y_{n+1}+2(2y_n+x_n)-y_n\\&=2y_{n+1}+2y_{n+1}-y_n\\&=4y_{n+1}-y_n.\end{aligned}$$

3. $x^2=5y^2-4$

不定方程 $x_2=5y^2-4$ 的解为 $x_{n+1}=20y_n+9x_n$，$y_{n+1}=9y_n+4x_n$，且 $x_1=1$，$y_1=1$ 及 $x_{n+1}=20y_n+9x_n$，$y_{n+1}=9y_n+4x_n$，$x_1=11$，$y_1=5$.

设 x 不超过正整数 m 时的解数为 $N(m)$，

$$N(m)\sim\frac{2\ln m}{\ln(9+4\sqrt{5})},\lim_{m\to+\infty}\frac{N(m)}{\ln m}=\frac{2}{\ln(9+4\sqrt{5})}.$$

方程的参数解也可表示为：

$x_{n+2}=18x_{n+1}-x_n, x_1=1, x_2=29$,

$y_{n+2}=18y_{n+1}-y_n$, $y_1=1, y_2=13$,

$x_{n+2}=18x_{n+1}-x_n$, $x_2=11, x_2=199$,

$y_{n+2}=18y_{n+1}-y_n$, $y_2=5$, $y_2=89$.

证明:设 $x=2y+a, a\in\mathbf{Z}, (2y+a)^2=5y^2-4, y^2-4ay-(4+a^2)=0$,我们有 $y=2a\pm\sqrt{5a^2+4}$. $a=-1, y=1, x=1, a=5, y=5, x=11$.

当 $y\geqslant 5$ 时,$x^2=5y^2-4>4y^2, x>2y$,a 只能取正整数,若 $y=2a-\sqrt{5a^2+4}$,显见 $y<0$,故只能取 $y=2a+\sqrt{5a^2+4}$,令 $5a^2+4=D^2, D\in\mathbf{N}$, $D=2a+b, b\in\mathbf{N}$.

$(2a+b)^2=5a^2+4, a^2-4ba+4-b^2=0$,我们得到方程的解为:

$$a=\frac{4b\pm\sqrt{(4b)^2-4(1-b^2)}}{2}=2b\pm\sqrt{5b^2-4}.$$

$a=2b-\sqrt{5b^2-4}, b=1, a=1, b=2, a=0, b\geqslant 3$ 时,$a=2b-\sqrt{5b^2-4}<0$. 取 $a=2b+\sqrt{5b^2-4}$,令 $b=y_n, \sqrt{5b^2-4}=x_n, a=2y_n+x_n$,由于 $D=2a+b$,得到 $D=2a+b=5y_n+2x_n, y=2a+D=9y_n+4x_n$, $x=2y+a=20y_n+9x_n$,这样得到方程的解为:

$x_{n+1}=20y_n+9x_n, y_{n+1}=9y_n+4x_n, x_1=1, y_1=1$;

$x_{n+1}=20y_n+9x_n, y_{n+1}=9y_n+4x_n, x_1=11, y_1=5$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}20\frac{y_n}{x_n}+9=9+4\sqrt{5}$,设 x 不超过正整数 m 的解数为 $N(m)$,有 $\ln(9+4\sqrt{5})^{\frac{1}{2}N(m)}\sim\ln m$, $N(m)\sim\frac{2\ln m}{\ln(9+4\sqrt{5})}$. $\lim\limits_{m\to+\infty}\frac{N(m)}{\ln m}$

$$=\frac{2}{\ln(9+4\sqrt{5})}.$$

$x_{n+2}=20y_{n+1}+9x_{n+1}$

$=20(9y_n+4x_n)+9x_{n+1}$

$=9(20y_n+9x_n)-x_n+9x_{n+1}$

$=9x_{n+1}-x_n+9x_{n+1}$

$=18x_{n+1}-x_n$,

$y_{n+2}=9y_{n+1}+4x_{n+1}$

$=9y_{n+1}+4(20y_n+9x_n)$

$=9y_{n+1}+9(9y_n+4x_n)-y_n$

$=9y_{n+1}+9y_{n+1}-y_n$

$=18y_{n+1}-y_n$.

4. $x^2=6y^2-5$

不定方程 $x^2=6y^2-5$ 的解为 $x_{n+1}=12y_n+5x_n$, $y_{n+1}=3y_n+2x_n$, $x_1=1$, $y_1=1$ 及 $x_{n+1}=12y_n+5x_n$, $y_{n+1}=5y_n+2x_n$, $x_1=7$, $y_1=3$. 设 x 不超过正整数 m 的解数为 $N(m)$, $N(m)\sim\frac{2\ln m}{\ln(5+2\sqrt{6})}$, $\lim\limits_{m\to+\infty}\frac{N(m)}{\ln m}=\frac{2}{\ln(5+2\sqrt{6})}$.

方程的参解数也可表示为:

$x_{n+2}=10x_{n+1}-x_n$, $x_1=1$, $x_2=17$,

$y_{n+2}=10y_{n+1}-y_n$, $y_1=1$, $y_2=7$;

$x_{n+2}=10x_{n+1}-x_n$, $x_1=7$, $x_2=71$,

$y_{n+2}=10y_{n+1}-y_n$, $y_1=3$, $y_2=29$.

证明:$x^2=6y^2-5$ 的最小两组解为 $x_1=1$, $y_1=1$; $x_2=7$, $y_2=3$.

我们不妨设 $x=2y+a$, $a\in\mathbf{Z}$, $(2y+a)^2=6y^2-5$, $2y^2-4ay-(5+a^2)$

$=0$，方程的解为 $y=\frac{4a\pm\sqrt{(4a)^2+8(5+a^2)}}{4}=\frac{2a\pm\sqrt{6a^2+10}}{2}$.

$a>0$ 时，y 只能取 $y=\frac{2a+\sqrt{6a^2+10}}{2}$.

$a<0$ 时，a 只能取 $a=-1,y=1,x=1$.

令 $6a^2+10=D^2,D\in\mathbf{N},D=2a+b,b\in\mathbf{N},6a^2+10=(2a+b)^2$ 变换为 $2a^2-4ba+10-b^2=0$. $a=\frac{4b\pm\sqrt{(4b)^2-8(10-b^2)}}{4}=\frac{2b\pm\sqrt{6b^2-20}}{2}$，当 $a>0$ 时，有 $b=2,a=1,y=3,x=7$，以及 $a=\frac{2b+\sqrt{6b^2-20}}{2}$，令 $b=2y_n,D=6y_n+2x_n,y=a+\frac{D}{2}=5y_n+2x_n,x=2y+a=2(5y_n+2x_n)+2y_n+x_n=12y_n+5x_n$.

$x_{n+1}=12y_n+5x_n,y_{n+1}=12y_n+5x_n,x_1=1,y_1=1$,

$x_{n+1}=12y_n+5x_n,y_{n+1}=12y_n+5x_n,x_1=7,y_1=3$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}12\frac{y_n}{x_n}+5=5+2\sqrt{6}$，设 x 不超过正整数 m 的解数为 $N(m)$，我们有 $\ln(5+2\sqrt{6})^{\frac{1}{2}N(m)}\sim\ln m,N(m)\sim\frac{2\ln m}{\ln(5+2\sqrt{6})},\lim\limits_{m\to+\infty}\frac{N(m)}{\ln m}=\frac{2}{\ln(5+2\sqrt{6})}$.

$$\begin{aligned}x_{n+2}&=12y_{n+1}+5x_{n+1}\\&=12(5y_n+2x_n)+5x_{n+1}\\&=5(12y_n+5x_n)-x_n+5x_{n+1}\\&=5x_{n+1}-x_n+5x_{n+1}\\&=10x_{n+1}-x_n,\end{aligned}$$

$y_{n+2}=5y_{n+1}+2x_{n+1}$

$$=5y_{n+1}+2(12y_n+5x_n)$$

$$=5y_{n+1}+5(5y_n+2x_n)-y_n$$

$$=5y_{n+1}+5y_{n+1}-y_n$$

$$=10y_{n+1}-y_n.$$

5. $x^2=7y^2-6$

不定方程 $x^2=7y^2-6$ 的解为 $x_{n+1}=21y_n+8x_ny_{n+1}=8y_n+3x_n$，$x_1=1$，$y_1=1$ 及 $x_{n+1}=21x_n+8x_n$，$y_{n+1}=8y_n+3x_n$，$x_1=13$，$y_1=5$.

设 x 不超过正整数 m 的解数为 $N(m)$，$N(m)\sim\frac{2\ln m}{\ln(8+3\sqrt{7})}$，$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{N(m)}{\ln m}=\frac{2}{\ln(8+3\sqrt{7})}$.

方程的参数解也可表示为：

$x_{n+2}=16x_{n+1}-x_n$，$x_1=1$，$x_2=29$，

$y_{n+2}=16y_{n+1}-y_n$，$y_1=1$，$y_2=11$；

$x_{n+2}=16x_{n+1}-x_n$，$x_1=13$，$x_2=209$，

$y_{n+2}=16y_{n+1}-y_n$，$y_1=5$，$y_2=79$.

证明：设 $x=3y-a$，$a\in\mathbf{Z}$，易见 $a>0$. $(3y-a)^2=7y^2-6$，将方程整理为

$$2y^2-6ay+a^2+6=0,\ y=\frac{6a\pm\sqrt{(6a)^2-8(a^2+6)}}{2}=\frac{3a\pm\sqrt{7a^2-12}}{2}.$$

设 $7a^2-12=(3a-b)^2$，$D=3a-b$，$D\in\mathbf{N}$，$b\in\mathbf{N}$，$7a^2-12=(3a-b)^2$，于是有 $2a^2-6ba+b^2+12=0$，$a=\frac{6b\pm\sqrt{(6b)^2-8(b^2+12)}}{4}$ $=\frac{3b\pm\sqrt{7b^2-24}}{2}$.

$b=2,a=2,a=4,x_1=1,y_1=1,x_2=13,y_2=5.$ $b=3$、4、5，$\sqrt{7b^2-24}$ 不为整数. $b\geqslant 6$ 时，$a=\frac{3b-\sqrt{7b^2-24}}{2}$，有 $D=\frac{7b-3\sqrt{7b^2-24}}{2}<\frac{7b-3\sqrt{6b^2}}{2}<0.$

令 $b=2y_n$，$a=\frac{3b+\sqrt{7b^2-24}}{2}$，$\sqrt{7b^2-24}=\sqrt{7(2y_n)^2-24}=2\sqrt{7y_n^2-6}=2x_n$，$a=3y_n+x_n$，$D=3a-b=3(3y_n+x_n)-2y_n=7y_n+3x_n$，于是有：

$$y=\frac{3a+D}{2}=\frac{3(3y_n+x_n)+7y_n+3x_n}{2}=8y_n+3x_n,$$

$$x=3y-a=3(8y_n+3x_n)-(3y_n+x_n)=21y_n+8x_n.$$

不定方程 $x^2=7y^2-6$ 的参数解为：

$$x_{n+1}=21y_n+8x_n, y_{n+1}=8y_n+3x_n, x_1=1, y_1=1,$$

$$D=3a-b=3(3y_n+x_n)-y_n=8y_n+3x_n, x_1=13, y_1=5.$$

设 x 不超过正整数 m 的解数为 $N(m)$，由 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}21\frac{y_n}{x_n}+8=8+3\sqrt{7}$，得，$\ln(8+3\sqrt{7})^{\frac{1}{2}N(m)}\sim\ln m$，$N(m)\sim\frac{2\ln m}{\ln(8+3\sqrt{7})}$，$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{N(m)}{\ln m}=\frac{2}{\ln(8+3\sqrt{7})}.$

$$\begin{aligned}x_{n+2}&=21y_{n+1}+8x_{n+1}\\&=21(8y_n+3x_n)+8x_{n+1}\\&=8(21y_n+8x_n)-x_n+8x_{n+1}\\&=8x_{n+1}-x_n+8x_{n+1}\\&=16x_{n+1}-x_n,\end{aligned}$$

$$y_{n+2}=8y_{n+1}+3x_{n+1}$$

$=8y_{n+1}+3(21y_n+8x_n)$

$=8y_{n+1}+8(8y_n+3x_n)-y_n$

$=8y_{n+1}+8y_{n+1}-y_n$

$=16y_{n+1}-y_n$.

6. $x^2=8y^2-7$

不定方程 $x^2=8y^2-7$ 的解为 $x_{n+1}=8y_n+3x_n$，$y_{n+1}=3y_n+x_n$，$x_1=1$，$y_1=1$；$x_{n+1}=8y_n+3x_n$，$y_{n+1}=3y_n+x_n$，$x_1=5$，$y_1=2$. 设 x 不超过正整数 m 的解数为 $N(m)$，$N(m)\sim\frac{2\ln m}{\ln(3+2\sqrt{2})}$，$\lim\limits_{m\to+\infty}\frac{N(m)}{\ln m}=\frac{2}{\ln(3+2\sqrt{2})}$.

方程的参数解也可表示为：

$x_{n+2}=6x_{n+1}-x_n$，$x_1=1$，$x_2=11$，

$y_{n+2}=6y_{n+1}-y_n$，$y_1=1$，$y_2=4$；

$x_{n+2}=6x_{n+1}-x_n$，$x_1=5$，$x_2=31$，

$y_{n+2}=6y_{n+1}-y_n$，$y_1=2$，$y_2=11$.

证明：设 $x=3y-a$，$a\in\mathbf{N}$，$(3y-a)^2=8y^2-7$，变换为 $y^2-6ay+a^2+7=0$，方程的解为 $y=\frac{6a\pm\sqrt{(6a)^2-4(a^2+7)}}{2}=3a\pm\sqrt{8a^2-7}$.

$y=3a-\sqrt{8a^2-7}$，$x=3y-a=8a-3\sqrt{8a^2-7}$，$a=1$，$x=5$，$y=2$；$a=2$，$x=1$，$y=1$. $a\geqslant 4$ 时，$x=3y-a=8a-3\sqrt{8a^2-7}<0$.

$a\geqslant 4$ 时，只能取 $y=3a+\sqrt{8a^2-7}$，令 $a=y_n$，$\sqrt{8a^2-7}=x_n$，$y=3y_n+x_n$，$x=3(3y_n+x_n)-y_n=8y_n+3x_n$.

不定方程的参数解为：

$x_{n+1}=8y_n+3x_n$，$y_{n+1}=3y_n+x_n$，$x_1=1$，$y_1=1$，

$x_{n+1}=8y_n+3x_n, y_{n+1}=3y_n+x_n, x_1=5, y_1=2.$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to+\infty}8\frac{y_n}{x_n}+3=3+2\sqrt{2}.$$

设 x 不超过正整数 m 的解数为 $N(m)$，我们有 $\ln(3+2\sqrt{2})^{\frac{1}{2}N(m)}\sim\ln m$，于是得 $N(m)\sim\dfrac{2\ln m}{\ln(3+2\sqrt{2})}$，$\lim\limits_{m\to+\infty}\dfrac{N(m)}{\ln m}=\dfrac{2}{\ln(3+2\sqrt{2})}$.

$$\begin{aligned}x_{n+2}&=8y_{n+1}+3x_{n+1}\\&=8(3y_n+x_n)+3x_{n+1}\\&=3(8y_n+3x_n)-x_n+3x_{n+1}\\&=6x_{n+1}-x_n.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_{n+2}&=3y_{n+1}+x_{n+1}\\&=3y_{n+1}+8y_n+3x_n\\&=3y_{n+1}+3(3y_n+x_n)-y_n\\&=6y_{n+1}-y_n.\end{aligned}$$

三、其他二元二次不定方程

关于佩尔方程 $x^2-ny^2=1, n\in\mathbf{N}$，已有很多研究，这里不加以讨论了．仅讨论几个其他二元二次不定方程．

1. $2x^2=3y^2-1$

不定方程 $2x^2=3y^2-1$ 的解为 $x_{n+1}=5x_n+6y_n, y_{n+1}=5y_n+4x_n, x_1=1, y_1=1$. 设 x 不超过正整数 m 的解数为 $N(m)$，$N(m)\sim\dfrac{\ln m}{\ln(5+2\sqrt{6})}$，

$\lim\limits_{m\to+\infty}\dfrac{N(m)}{\ln m}=\dfrac{1}{\ln(5+2\sqrt{6})}$．方程的解也可表示为

$x_{n+2}=10x_{n+1}-x_n, x_1=1, x_2=11,$

$y_{n+2}=10y_{n+1}-y_n, y_1=1, y_2=9.$

证明：只考虑正整数解 $x\geqslant y$. 设 $x=y+a, a\in\mathbf{Z}, a\geqslant 0, 2(y+a)^2=3y^2-1$, $y^2-4ay-(2a^2+1)=0$, $y=\frac{4a\pm\sqrt{16a^2+4(2a^2+1)}}{2}$, $y=2a\pm\sqrt{6a^2+1}$, $y>0$, 仅取 $y=2a+\sqrt{6a^2+1}$, $6a^2+1=D^2, D\in\mathbf{N}$，其解为 $a_{n+1}=5a_n+2D_n, a_1=0, D_{n+1}=12a_n+5D_n, D_1=1, y_n=2a_n+D_n, x_n=3a_n+D_n$.

$$\begin{aligned}x_{n+1}&=3a_{n+1}+D_{n+1}\\&=3(5a_n+2D_n)+12a_n+5D_n\\&=27a_n+11D_n\\&=5(3a_n+D_n)+6(2a_n+D_n)\\&=5x_n+6y_n,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_{n+1}&=2a_{n+1}+D_{n+1}\\&=2(5a_n+2D_n)+12a_n+5D_n\\&=22a_n+9D_n\\&=5(2a_n+D_n)+4(3a_n+D_n)\\&=4x_n+5y_n.\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to+\infty}6\,\frac{y_n}{x_n}+5=5+2\sqrt{6}.$$

$$\begin{aligned}x_{n+2}&=5x_{n+1}+6y_{n+1}\\&=5x_{n+1}+6(5y_n+4x_n)\\&=5x_{n+1}+5(6y_n+5x_n)-x_n\\&=5x_{n+1}+5x_{n+1}-x_n\\&=10x_{n+1}-x_n,\end{aligned}$$

$$y_{n+2}=4x_{n+1}+5y_{n+1}$$

$=4(6y_n+5x_n)+5y_{n+1}$

$=5(5y_n+4x_n)-y_n+5y_{n+1}$

$=5y_{n+1}-y_n+5y_{n+1}$

$=10y_{n+1}-y_n$.

2. $x^2+x=2y^2+y-1$

不定方程 $x^2+x=2y^2+y-1$ 的解为 $x_n=\frac{D_n-1}{2}$，$x_2=4$，$y_n=\frac{E_n-1}{4}$，$y_2=3$，其中 D_n、E_n 为方程 $2D^2+7=E^2$ 的正整数解，$D_{n+1}=3D_n+2E_n$，$D_1=1$，$D_2=9$，$E_{n+1}=4D_n+3E_n$，$E_1=3$，$E_2=13$，D_n、E_n 中 n 取偶数；$x_n=\frac{D_n-1}{2}$，$x_1=1$，$y_n=\frac{E_n-1}{4}$，$y_1=1$，其中 D_n、E_n 为方程 $2D^2+7=E^2$ 的解，$D_{n+1}=3D_n+2E_n$，$D_1=3$，$E_{n+1}=4D_n+3E_n$，$E_1=5$，$E_2=27$，D_n、E_n 中 n 取奇数. 设 x 不超过正整数 m 的解数为 $N(m)$，$N(m)\sim\frac{\ln m}{\ln(3+2\sqrt{2})}$，$\lim\limits_{m\to+\infty}\frac{N(m)}{\ln m}=\frac{1}{\ln(3+2\sqrt{2})}$.

证明：$x^2+x=2y^2+y-1$，$4(x^2+x)=4(2y^2+y-1)$，进一步将方程变换为 $4(x^2+x)+1=4(2y^2+y-1)+1$，$(2x+1)^2=8y^2+4y-3$，令 $8y^2+4y-3=D$，y 为正整数，有 $D\in\mathbf{N}$. $8y^2+4y-(3+D^2)=0$，$y=\frac{-1\pm\sqrt{2D^2+7}}{4}$，只考虑正整数解，$y=\frac{-1+\sqrt{2D^2+7}}{4}$. 不定方程 $2D^2+7=E^2$ 的解为：

$D_{n+1}=3D_n+2E_n$，$E_{n+1}=4D_n+3E_n$，$D_1=1$，$E_1=3$；

$D_{n+1}=3D_n+2E_n$，$E_{n+1}=4D_n+3E_n$，$D_1=3$，$E_1=5$.

E_n 显然为奇数，$E_n=4R+1$ 时，y 为整数，$E_n=4R+3$ 时 y 为分数.

$x_n=\dfrac{D_n-1}{2}, y_n=\dfrac{E_n-1}{4}$，其中 D_n、E_n 为方程 $2D^2+7=E^2$ 的解.

$D_{n+1}=3D_n+2E_n, E_{n+1}=4D_n+3E_n, D_1=1, E_1=3$，$D_n$、$E_n$ 中 n 仅取偶数. 此时 $E_2=13, D_2=9, x_2=4, y_2=3$.

$x_n=\dfrac{D_n-1}{2}, y_n=\dfrac{E_n-1}{4}$，其中 D_n、E_n 为方程 $2D^2+7=E^2$ 的解.

$D_{n+1}=3D_n+2E_n, E_{n+1}=4D_n+3E_n, D_1=3, E_1=5$，$D_n$、$E_n$ 中 n 仅取奇数.

不定方程 $2D^2+7=E^2$ 的解数分布为：$N(m)\sim\dfrac{\ln m}{\ln(3+2\sqrt{2})}$，因此，不定方程 $x^2+x=2y^2+y-1$ 中 x 不超过正整数 m 的解数为 $N(m)$，$N(m)\sim\dfrac{\ln m}{\ln(3+2\sqrt{2})}$，$\lim\limits_{m\to+\infty}\dfrac{N(m)}{\ln m}=\dfrac{1}{\ln(3+2\sqrt{2})}$.

3. $y^2-4y=x^2-2x$

不定方程 $y^2-4y=x^2-2x$ 只有唯一正整数解 $x=2, y=4$.

证明：$y^2-4y=x^2-2x$，$(y-2)^2=(x-1)^2+3$，得 $y=4, x=2$.

四、关于二元二次不定方程的总结

1. 二元二次不定方程可能没有正整数解

不定方程 $x^2=7y^2-1$、$x^2=8y^2-1$ 都没有正整数解.

2. 二元二次不定方程可能只有有限组整数解

不定方程 $y^2-4y=x^2-2x$ 仅有一组正整数解，$y=4, x=2$. 另几组整

数解为 $x=0, y=0; y=0, x=2; y=4, x=0$.

3. 二元二次不定方程可能有无限组解

不定方程 $x^2=2y^2-1, 2x^2=3y^2-1$ 都有无限组解.

4. 二元二次不定方程解数分别规律

二元二次不定方程如果有无限组解，在我们已讨论的问题中，发现它们的解数分布规律有相似的表现形式 $N(m)\sim c\ln m$，仅系数 c 不同而已. 在这里花了很大的篇幅讨论二元二次不定方程，是为了让读者对分布规律留下较深的印象，因为后面要介绍的新的数学理论指出，二元二次不定方程有无限个解的时候，它的解不是杂乱无章的分布，而是按 $N(m)\sim c\ln m$ 规律来分布.

第三章　不定方程 $x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n=x_{n+1}^n$

欧拉(Euler)认为不定方程 $x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n=x_{n+1}^n$ 都有正整数解，这一推测是基于不定方程 $x_1^2+x_2^2=x_3^2$ 有无数个正整数解而作出的类比. 欧拉说过：类比是伟大的引路人. 拉普拉斯也说过：甚至在数学里，发现真理的工具也是归纳和类比.

一、不定方程 $x_1^2+x_2^2=x_3^2$ 及相关不定方程

1. $x_1^2+x_2^2=x_3^2$

不定方程 $x_1^2+x_2^2=x_3^2$ 的非平凡正整数解为 $x_1=a^2-b^2$，$x_2=2ab$，$x_3=a^2+b^2$，$a>b$，$(a,b)=1$，a,b 一奇一偶. 设 x_3 不超过正整数 m 的解数为$N(m)$，

$$N(m)\sim\frac{1}{2\pi}m,\ \lim_{m\to+\infty}\frac{N(m)}{m}=\frac{1}{2\pi}.$$

证明：方程的整数解的表达式由中国古代数学家刘徽最早给出，国外则由数学家丢番图(Diophantus)最早给出. 下面仅对解数分布规律给出推导.

数学家高斯(Gauss)给出了 $a^2+b^2\leqslant m$ 的圆内整点数 $P(m)$，

$P(m)\sim\pi m,\ \lim\limits_{m\to+\infty}\dfrac{P(m)}{\pi m}=1.$

a,b 均为正整数的圆内整点数为 $P_1(m)$，

$P_1(m)\sim\dfrac{\pi}{4}m,\ \lim\limits_{m\to+\infty}\dfrac{P_1(m)}{\dfrac{\pi}{4}m}=1.$

a,b 均为正整数，且 $a>b$ 的圆内整点数为 $P_2(m)$，

$P_2(m)\sim\dfrac{\pi}{8}m,\ \lim\limits_{m\to+\infty}\dfrac{P_2(m)}{\dfrac{\pi}{8}m}=1.$

a,b 均为正整数，且 $a>b$，a,b 一奇一偶的圆内整点数为 $P_3(m)$，

$P_3(m)\sim\dfrac{\pi}{16}m,\ \lim\limits_{m\to+\infty}\dfrac{P_3(m)}{\dfrac{\pi}{16}m}=1.$

设 x_3 不超过正整数 m 的解数为 $N(m)$，

$N(m)\times\left(1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n+1)^2}+\cdots\right)\sim P_3(m).$

设 $1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n+1)^2}+\cdots=S$，(A)

数学家欧拉给出了贝努利(Bernoulli)级数的和：

$1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}+\cdots=\dfrac{\pi^2}{6}$，

得 $\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{6^2}+\cdots\dfrac{1}{(2n)^2}+\cdots=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{\pi^2}{6}$，(B)

(A)+(B)得 $\dfrac{\pi^2}{6}=S+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{\pi^2}{6}$，$S=\dfrac{\pi^2}{8}$，

$N(m)\times\dfrac{\pi^2}{8}\sim\dfrac{\pi}{16}m$，解数分布规律为 $N(m)\sim\dfrac{1}{2\pi}m,\ \lim\limits_{m\to+\infty}\dfrac{N(m)}{m}=\dfrac{1}{2\pi}.$

不定方程 $x_1^2+x_2^2=x_3^2$，如果不要求正整数解互质，则它的解数分布规律为 $N(m)\sim cm\ln m$.

2. 不定方程 $x_1^2+x_2^2=2x_3^2, x_1\neq x_2$

不定方程 $x_1^2+x_2^2=2x_3^2$ 的非平凡正整数解为 $x_3=a^2+b^2, x_2=a^2+2ab-b^2, x_1=|b^2+2ab-a^2|, (a,b)=1, a>b, a,b$ 一奇一偶，设 x_3 不超过正整数 m 的解数 $N(m)$，$N(m)\sim\frac{1}{2\pi}m, \lim\limits_{m\to+\infty}\frac{N(m)}{m}=\frac{1}{2\pi}$.

证明：令 $x_1=x_3-a, x_2=x_3+b, a\in\mathbf{N}, b\in\mathbf{N}$. $(x_3-a)^2+(x_3+b)^2=2x_3^2$，整理得 $(2a-2b)x_3=a^2+b^2$，$x_3=\frac{a^2+b^2}{2(a-b)}$，$x_3>0$，故 $a>b$，我们得到：

$$x_2=\frac{a^2+b^2}{2(a-b)}+b=\frac{a^2+2ab-b^2}{2(a-b)}, x_1=\frac{a^2+b^2}{2(a-b)}-a=\frac{b^2+2ab-a^2}{2(a-b)}.$$

$b^2+2ab-a^2<0$，x_1 为负数，故取，$x_1=|b^2+2ab-a^2|, x_2=a^2+2ab-b^2$，$x_3=a^2+b^2, (a,b)=1, a>b, a,b$ 为一奇一偶.

$a=2, b=1$ 得方程最小正整数解 $1^2+7^2=2\times5^2$.

设 x_3 不超过正整数 m 时的解数为 $N(m)$，参考不定方程 $x_1^2+x_2^2=x_3^2$ 的解数公式推导，解数分布为 $N(m)\sim\frac{1}{2\pi}m, \lim\limits_{m\to+\infty}\frac{N(m)}{m}=\frac{1}{2\pi}$.

3. 不定方程 $x_1^2+x_2^2=x_3^2+1$，$x_1\neq x_3$，$x_2\neq x_3$

不定方程 $x_1^2+x_2^2=x_1^2+1, x_1\neq x_3, x_2\neq x_3$ 有无数组解.

证明：令 $x_1=x_3-a, x_2=x_3-b, a\in\mathbf{N}, b\in\mathbf{N}$.

$(x_3-a)^2+(x_3-b)^2=x_3^2+1, x_3^2-2(a+b)x_3+(a^2+b^2-1)=0$,

$x_3=a+b+\sqrt{2ab+1}$，令 $2ab+1=u^2, u\in\mathbf{N}$，对任何奇数 u，$2ab+1=u^2$ 都有解，故方程 $x_1^2+x_2^2=x_3^2+1$ 有无数组解.

4. 不定方程 $x_1^2+x_2^2=3x_3^2$

不定方程 $x_1^2+x_2^2=3x_3^2$ 没有正整数解.

证明:若 $x_1^2+x_2^2=3x_3^2$有正整数解,则必有一组最小的正整数解 x_1、x_2、x_3没有公约数.若 $3|x_1$,则 $3|x_2$,从而 $3|x_3$,与假设矛盾,无解.若 x_1 不能被 3 整除,则 x_2 也不能被 3 整除,$x_1^2-1+x_2^2-1+2=3x_3^2$,由于 $3|(x_1^2-1)$,$3|(x_2^2-1)$,我们知道这个方程没有解.

二、不定方程 $x_1^3+x_2^3+x_3^3=x_4^3$

不定方程 $x_1^3+x_2^3+x_3^3=x_4^3$ 的部分解:

$3^3+4^3+5^3=6^3$, $68^3+57^3+180^3=185^3$, $9^3+58^3+255^3=256^3$, $26590452^3+17492496^3+53813536^3=56461300^3$.

如果我们知道了不定方程 $x_1^3+x_2^3+x_3^3=x_4^3$ 的两组解,就可以构造出新的正整数解.结果如下:

$x_1^3+y_1^3+z_1^3=w_1^3$, $x_2^3+y_2^3+z_2^3=w_2^3$ 为 $x_1^3+x_2^3+x_3^3=x_4^3$ 的两组解,我们有:

$(ax_2-bx_1)^3+(ay_2-by_1)^3+(az_2-bz_1)^3=(aw_2-bw_1)^3$.

其中 $a=x_1^2x_2+y_1^2y_2+z_1^2z_2-w_1^2w_2$,$b=x_2^2x_1+y_2^2y_1+z_2^2z_1-w_2^2w_1$.

由 $9^3+58^3+255^3=256^3$,$68^3+57^3+180^3=185^3$,根据上面的方法,我们可以得一组新的整数解,$12697594^3+(-27858012)^3+(-28700490)^3=(-27858012)^3$.

由 $9^3+58^3+255^3=256^3$,$57^3+180^3+68^3=185^3$,我们可以得到一组新的整数解 $140474229^3+353196060^3+947523878^3=964601981^3$.

由 $9^3+58^3+255^3=256^3$,$68^3+180^3+57^3=185^3$,我们可以得到一组新的整数解 $476745475^3+1056494498^3+94905189^3=1088151396^3$.

将两组解的排列顺序改变,就可以得到新的一组整数解.

三、不定方程 $x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=x_5^4$

欧拉认为 $x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=x_5^4$ 有解，一直到 1911 年，诺里(Norrie)给出了第一组解为 $30^4+120^4+272^4+315^4=353^4$.

四、不定方程 $x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n=x_{n+1}^n$

$n=2$ 时，古代就知道方程有无数组正整数解，但对于 n 为任意正整数的情况欧拉猜测方程都有解.

我们将在后面讨论 n 为正整数的一般情况，我们将知道它有正整数解，而且有无限多组正整数解，且有与 $x_1^2+x_2^2=x_3^2$ 类似的分布规律，$N(m)\sim c_n m$，不同的不定方程，系数 c_n 不同而已.

第四章　不定方程与级数$\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^{1+\varepsilon}}$的收敛和发散

对于级数的收敛和发散，代表着有限和无限. 不定方程的解数与级数的收敛和发散有着深刻的联系，我们将在后面的新理论中看到这一点. 级数的发展过程这一段历史，对于我们了解数学是如何逐步完善的，也是大有帮助的.

对于级数$\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^{1+\epsilon}}$的求和以及$n\to+\infty$的收敛和发散，下面分三种情况讨论.

一、级数的收敛和发散

1. $\varepsilon=0$ 的情形

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}$发散.

定理：$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=r$，

其中r为欧拉常数，$r=0.577\cdots$

2. $\varepsilon > 0$ 的情形

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{m=1}^{n}\frac{1}{m^{1+\varepsilon}}$ 收敛.

ε 为奇数时,欧拉给出了伯努利级数的一般求和公式.

特别地,$\varepsilon=1$,$\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{m=1}^{n}\frac{1}{m^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$.

下面给出几个级数的和:

$$S_2=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots,$$

$$S_3=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^3}=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{n^3}+\cdots,$$

$$S_4=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots+\frac{1}{n^4}+\cdots,$$

一般地有

$$S_k=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^k}=\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{4^k}+\cdots+\frac{1}{n^k}+\cdots.$$

$$\sum_{k=2}^{+\infty}S_k=1=S_2+S_3+S_4+\cdots+S_k+\cdots.$$

当 k 为偶数时,$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}S_k=\frac{3}{4}=S_2+S_4+S_6+\cdots+S_k+\cdots$.

当 k 为偶数时,S_k 为超越数,我们看到,这无限个超越数之和为一个有理数.过去我们经常看到无限个有理数之和用来表示一个超越数.

常数 e 的表达式 $e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$.

莱布尼兹(Leibniz) 公式 $\frac{\pi}{4}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}+\cdots$.

当k为奇数时，$\sum_{k=3}^{+\infty}S_k=\frac{1}{4}=S_3+S_5+S_7+\cdots+S_k+\cdots$. 法国数学家证明了$S_3$是一个无理数，但其他的$S_k$是否是无理数还不能给出证明.

$$\frac{1}{1\times1!}=1=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}+\cdots.$$

$$\frac{1}{2\times2!}=\frac{1}{4}=\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}+\cdots.$$

$$\frac{1}{3\times3!}=\frac{1}{18}=\frac{1}{1\times2\times3\times4}+\frac{1}{2\times3\times4\times5}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}+\cdots.$$

一般的，$\frac{1}{(k-1)\times(k-1)!}=\frac{1}{1\times2\times3\times\cdots\times k}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)\times\cdots\times(n+k-1)}+\cdots.$

其前m项之和的公式如下：

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)\times\cdots\times(n+k-1)}=\frac{1}{k-1}\left[\frac{1}{(k-1)!}-\frac{m!}{(k+m-1)!}\right].$$

3. $\varepsilon<0$ 的情形

$\lim\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^{1+\epsilon}}$ 发散.

定理：$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^{1+\epsilon}}}{\left|\frac{1}{\epsilon}\right|n^{-\epsilon}}=1.$

$\varepsilon=-\frac{1}{2}$ 时，$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\sim 2\sqrt{n}$，

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}}=1.$$

$\varepsilon=-\frac{3}{2}$ 时，$1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}\sim\frac{2}{3}n\sqrt{n}$，

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}=\frac{2}{3}.$$

$\varepsilon=-3$ 时，$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\sim\frac{1}{3}n^3$，

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}=\frac{1}{3}.$$

从这里不难看出 $1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k$ 的求和公式 n^{k+1} 的系数正好为 $\frac{1}{k+1}$.

二、不定方程的解的有限与无限转化为级数的收敛和发散

级数的收敛，表示有限；级数的发散，表示无限. 在后面的介绍中，会将方程的解的有限与无限与级数的收敛和发散深刻的联系在一起，读者将会清晰地看到二元二次不定方程的解的表达形式 $N(m)\sim c\ln m\sim c(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m})=c\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}$ 和级数统一起来.

第五章　不定方程与排列组合

排列组合与不定方程似乎没有什么联系，至少在过去求解不定方程的过程中并不需要什么排列组合，但新的数学理论涉及了排列组合. 下面给出部分排列组合结果，它们与不定方程有无限组解或有限组解存在着深刻的联系.

一、两个数的组合

给定两个正整数 x_1、x_2，$x_1 \leqslant m$、$x_2 \leqslant m$，$m \in \mathbf{N}$，x_1、x_2 的位置互换视为同一种组合，记 x_1、x_2 给出的组合数为 C_{2m}，记 x_1、x_2 中至少有一个数为 m 的组合数为 U_{2m}，

数的排列组合	组合数
(1,1)	1
(2,1)　(2,2)	2
(3,1)　(3,2)　(3,3)	3
…	
$(m,1)$　$(m,2)$　$(m,3)$　…　(m,m)	$U_{2m} = m$

总的组合数 $C_{2m} = \dfrac{m(m+1)}{2}$.

二、三个数的组合

给定三个正整数 x_1、x_2、x_3，$x_1 \leqslant m$、$x_2 \leqslant m$、$x_3 \leqslant m$，$m \in \mathbf{N}$，x_1、x_2、x_3 位置互换视为同一种组合，记 x_1、x_2、x_3 给出的组合数为 C_{3m}，记 x_1、x_2、x_3 中至少有一个数为 m 的组合数 U_{3m}.

数的排列组合	组合数
(1,1,1)	1
(2,1,1) (2,1,2) (2,2,2)	3
(3,1,1) (3,1,2) (3,1,3) (3,2,2) (3,2,3) (3,3,3)	6
…	
$(m,1,1)$ $(m,1,2)$ $(m,1,3)$ … (m,m,m)	$U_{3m}=\dfrac{m(m+1)}{2}$

总的组合数 $C_{3m}=1+3+6+\cdots+\dfrac{m(m+1)}{2}=\dfrac{1}{3!}m(m+1)(m+2)$.

三、四个数的组合

给定四个正整数 x_1、x_2、x_3、x_4，$x_1 \leqslant m$、$x_2 \leqslant m$、$x_3 \leqslant m$、$x_4 \leqslant m$，$m \in \mathbf{N}$，x_1、x_2、x_3、x_4 互换位置视为同一种组合，记总的组合数为 C_{4m}，x_1、x_2、x_3、x_4 中至少有一个数是 m 的组合数为 U_{4m}.

数的排列	组合数
(1,1,1,1)	1
(2,1,1,1)(2,1,1,2)(2,1,2,2)(2,2,2,2)	4
(3,1,1,1)(3,1,1,2)(3,1,2,2)(3,2,2,2)(3,3,1,1)	10

(3,3,1,2)(3,3,2,2)(3,3,3,1)(3,3,3,2)(3,3,3,3)

…

$(m,1,1,1)(m,1,1,2)(m,1,1,3)\cdots(m,m,m,m)$

$$U_{4m}=\frac{1}{3!}m(m+1)(m+2)$$

总的组合数 $C_{4m}=1+4+10+\cdots+\frac{1}{3!}m(m+1)(m+2)=\frac{1}{4!}m(m+1)(m+2)(m+3)$.

下面用数学归纳法证明上述求和公式.

$\sum\limits_{n=1}^{m}\frac{1}{2!}n(n+1)=\frac{1}{3!}m(m+1)(m+2)$,(A)

$\sum\limits_{n=1}^{m}\frac{1}{3!}n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4!}m(m+1)(m+2)(m+3)$,(B)

证明:先证(A).

$n=1$ 时,左边 $=1$,右边 $=1$,成立.

设 $n=k$ 时成立,$\sum\limits_{n=1}^{k}\frac{1}{2!}n(n+1)=\frac{1}{3!}k(k+1)(k+2)$.

$n=k+1$ 时,

左边$=\frac{1}{3!}k(k+1)(k+2)+\frac{1}{2!}(k+1)(k+2)$

$=\frac{1}{3!}(k+1)(k+2)(k+3)=$ 右边.

故上述结论成立.

再证(B).

$n=1$ 时,左边 $=1$,右边 $=1$,成立.

设 $n=k$ 时成立,$\sum\limits_{n=1}^{k}\frac{1}{3!}k(k+1)(k+2)=\frac{1}{4!}k(k+1)(k+2)(k+3)$

$n=k+1$ 时,

$$\text{左边}=\frac{1}{4!}k(k+1)(k+2)(k+3)+\frac{1}{3!}(k+1)(k+2)(k+3)$$

$$=\frac{1}{4!}(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)=\text{右边}.$$

故上述结论成立.

四、任意个数的组合

给定 k 个正整数,x_1、x_2,…,x_i,…,x_k,$x_i\leqslant m$,x_1、x_2、…,x_i,…,x_k 互换位置视为同一种组合,记总的组合数为 C_{km},x_i 中有一个数是 m 的组合数为 U_{km},

$$U_{km}=\frac{1}{(k-1)!}m(m+1)\cdots(m+k-2)\ ,(A)$$

$$C_{km}=\sum_{m=1}^{m}U_{km}=\frac{1}{k!}m(m+1)\cdots(m+k-1),(B)$$

证明: $m=1$ 时,(B) 式左边 $=$ 右边 $=1$. 设 $m=N$ 时成立. $m=N+1$ 时,

$$\text{(B) 式左边}=\frac{1}{(k-1)!}(N+1)(N+2)\cdots(N+k-1)+\frac{1}{k!}N(N+1)\cdots(N+k-1)$$

$$=\frac{1}{k!}(N+1)(N+2)\cdots(N+k)=\text{右边},\text{故结论(B) 成立}.$$

注意到 $U_{km}=C_{(k-1)m}$,由排列组合知道这个结论.

下面给出(A) 和牛顿(Newton) 二项式系数的一个联系.

U_{2m}:1,2,3,4,…,m,

U_{3m}:1,3,6,10,…,$\frac{m(m+1)}{2}$,

U_{4m}: $1,4,10,20,\cdots,\dfrac{m(m+1)(m+2)}{3!}$,

U_{5m}: $1,5,15,35,\cdots,\dfrac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{4!}$,

U_{6m}: $1,6,21,56,\cdots,\dfrac{m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{5!}$.

U_{2m} 至 U_{km} 所给出的数都对应牛顿二项式定理 $(a+b)^n$ 中的系数，下面的三角又称为杨辉三角或帕斯卡(Pascal) 三角.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & 2 & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 3 \quad 3 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 4 & 6 & 4 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & 10 & & 10 & 5 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 6 & 15 & & 20 & & 15 & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & 7 & & 1 &
\end{array}
$$

五、$C_{km}=\sum\limits_{m=1}^{m}U_{km}$ 与 k 次幂之和的计算

$C_{km}=\sum\limits_{m=1}^{m}U_{km}$ 提供了求 k 次幂之和的一种方法.

$S_2=1^2+2^2+3^2+\cdots+m^2=\sum\limits_{m=1}^{m}m^2$.

$U_{3m}=\dfrac{1}{2!}m(m+1)$,

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{m}U_{3m} &= \sum_{m=1}^{m}\frac{1}{2!}m(m+1)=\frac{m(m+1)}{2\times 2!}+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{m}m^2 \\
&= \frac{1}{3!}m(m+1)(m+2).
\end{aligned}
$$

$$\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{m} m^2 = \frac{1}{3!}m(m+1)(m+2) - \frac{m(m+1)}{2\times 2!}$$

$$= \frac{1}{3!\times 2}m(m+1)(2m+1),$$

$$\sum_{m=1}^{m} m^2 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1).$$

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + m^3 = \sum_{m=1}^{m} m^3.$$

$$U_{4m} = \frac{1}{3!}m(m+1)(m+2),$$

$$\sum_{m=1}^{m} U_{4m} = \sum_{m=1}^{m} \frac{1}{3!}m^3 + \sum_{m=1}^{m} \frac{1}{2!}m^2 + \sum_{m=1}^{m} \frac{1}{3}m$$

$$= \frac{1}{4!}m(m+1)(m+2)(m+3),$$

$$\sum_{m=1}^{m} \frac{1}{2!}m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{12},$$

$$\sum_{m=1}^{m} \frac{1}{3}m = \frac{m(m+1)}{6},$$

$$\sum_{m=1}^{m} \frac{1}{3!}m^3 = \frac{1}{24}m(m+1)(m+2)(m+3) - \frac{1}{12}m(m+1)(2m+1) -$$

$$\frac{1}{6}m(m+1)$$

$$= \frac{1}{24}m^2(m+1)^2.$$

我们得到：$\sum_{m=1}^{m} m^3 = \frac{1}{4}m^2(m+1)^2.$

第六章　关于不定方程的哲学思考

对于不定方程研究，数学家发展了许多数学理论，也使一些问题的研究获得了进展和突破. 费马(Fermat)大定理的证明，是20世纪数学划时代的成就. 对于不定方程，现有的数学理论是能解决绝大多数的问题，还是只能解决极少数的问题呢？对于两个未知数的不定方程，当它们的指数是2时，我们在第二章作了详细的介绍，找到了一般的参数解及解数分布规律. 关于三个未知数的，当它们的指数是2时，我们也找到了它们的参数解以及某些情况下的解数分布规律. 费马大定理是关于三个未知数的，未知数的指数是3和3以上，它也获得了完整的解决. 需要明确地指出，四个或四个以上未知数的不定方程的一般情形，我们没有一般的数学理论来讨论这些问题. 每一个不定方程有它的特殊性，所有的不定方程有它们的共性. 不定方程之间不是完全孤立的，我们需要用联系的观点来对待. 自然世界有其确定性的一面，也有非确定性的一面. 数学在某种意义上，也是自然世界的一部分. 关于数学的真理，有一部分在决定论的范畴里获得，是否有一部分在非决定论的范畴里获得呢？

一、马蒂雅谢维奇(Matiyasevich)等对希尔伯特(Hilbert)问题的回答

希尔伯特问题:是否存在一个由有限步构成的算法来判定不定方程是否有解.经过许多数学家的努力之后,马蒂雅谢维奇最终给出了一个否定的回答.存在这样的不定方程,它没有解,我们既不能判定没有解,也不能判定它有解,从某种意义上来说,数学中存在一些不可以判别真伪的命题,它与数学理论发展的程度并无关系.

一个不定方程,要么有解,要么无解,两者必居其一,这是一个逻辑上的必然选择,但这并不意味着人类的认识能力一定会给出一个正确的判定.换句话说,人类的认识能力也并非万能.我们可以对马蒂亚谢维奇的结论作出这样的解读.

二、欧拉的一个深刻思想

费马认为 $x^n+y^n=z^n$, $n\geqslant 3$ 无解,欧拉推测 $x_1^n+x_2^n+\cdots+x_{k-1}^n=x_k^n$, $n\geqslant k$ 时无解,$n<k$ 时有解.

n 是不定方程未知数的幂,k 是不定方程未知数的个数,不定方程有没有解直接由 n 和 k 来决定,欧拉这一思想是极其深刻的,新的数学理论包含了欧拉这一简单而深刻的思想.当然,不定方程有无解完全由 n 和 k 来决定,则稍有点片面.$x_1^3+x_2^3=x_3^3$ 无正整数解,$x_1^3+x_2^3$ 可以分解因式,$x_1^n+x_2^n+\cdots+x_{n-1}^n=x_n^n$,我们知道,$n\geqslant 4$ 时,方程左边不可以分解因式,这是欧拉的推测不完全正确的一个原因.取 $k=5$,$x_1^n+x_2^n+x_3^n+x_4^n=x_5^n$,$n>5$,引

用欧拉的猜想有：

$x_1^n + x_2^n + x_3^n + x_4^n = x_5^n$，$n > 5$ 时方程没有正整数解.（A）

下面将（A）与费马问题联系起来：

若（A）成立，则 $n > 5$ 时，$x_1^n + x_2^n = x_3^n$ 没有正整数解.（B）

下面对（B）给出一个简单的证明.

证明：设 $n > 5$ 时，$x_1^n + x_2^n = x_3^n$ 有一组正整数解 x_{10}、x_{20}、x_{30}，使 $x_{10}^n + x_{20}^n = x_{30}^n$ 成立. $(x_{10}^n + x_{20}^n)^2 = (x_{30}^n)^2$，$(x_{10}^2)^n + (x_{10}x_{20})^n + (x_{10}x_{20})^n + (x_{20}^2)^n = (x_{30}^2)^n$，这样导出了 $x_1^n + x_2^n + x_3^n + x_4^n = x_5^n$ 有正整数解，$x_1 = x_{10}^2$，$x_2 = x_3 = x_{10}x_{20}$，$x_4 = x_{20}^2$，$x_5 = x_{30}^2$，矛盾. 这样便证明了结论（B）.

由 $x_1^n + x_2^n + x_3^n + x_4^n = x_5^n$，$n > 5$ 无正整数解可以推导出 $x_1^n + x_2^n = x_3^n$，$n > 5$ 没有正整数解.

由 $x_1^n + x_2^n = x_3^n$，$n > 5$ 无正整数解不可以推导出 $x_1^n + x_2^n + x_3^n + x_4^n = x_5^n$，$n > 5$ 没有正整数解.

数学家怀尔斯（Wiles）已完整解决了费马猜想，这是数学理论发展取得许多成就之后的一个伟大的结果，也是人类理性的光辉.

由于费马问题仅是欧拉问题中 $k = 3$ 的一个特例，$k = 4$，$k = 5$，k 为任意自然数呢？

寻找一种理论来讨论欧拉问题，严格地说，欧拉的猜想也只是不定方程中的一个问题，寻找一种理论来讨论不定方程有无限组解还是有限组解，是新的数学理论的一个明确的目标.

三、微积分的建立对不定方程研究的启示

一个四边形，一个三角形，一个椭圆，一个圆，从拓扑学的角度而言，它

们是等价的. 换句话说,从拓扑学的角度来看,一个四边形,一个三角形,一个椭圆,一个圆是有共性的.

一个四边形,一个三角形,一个椭圆,一个圆,或者是用一条曲线封闭形成的一个单一图形,尽管它们的形状各异,但我们求其面积时,它们却有共性:都可以微,都可以积. 牛顿和布莱尼茨各自建立了微积分.

对于不定方程,建立统一的数学理论来判定不定方程是有限组解还是无限组解,那么,就需要抽象出不定方程的一般共性. 需要指出一点,有限组解是包含了不定方程没有解. 方程只有一组解,方程有一百组解,方程没有一组解,都属于方程只有有限组解.

方程是有无限组解还是有有限组解,不同于希尔伯特的提法 —— 方程是有解还是无解.

四、非决定论和决定论对不定方程研究的启示

在我们认识的自然世界里,决定论和非决定论都起着非常重要的作用,它们是对立的也是统一的. 量子理论就是建立在非决定论基础之上.

不定方程,不定的中文意思便含有不确定的意思,但关于不定方程研究的全部数学理论都来自于决定论.

物理学中有一个著名的海森堡(Heisenberg) 测不准原理,无法准确测定微观粒子的动量和位置,动量和位置的不确定性由 $\Delta p \times \Delta x \geqslant \frac{h}{2\pi}$ 来确定,它与测量技术的发展程度并没有关系.

美国数学家 M. 克莱因(M. Kline) 在其著作《数学,确定性的丧失》中提到:数学同自然界及自然科学一样,有其确定性的一面,也有非确定性的一面. 当我们看到非确定性的一面时,并不意味着原有的确定性的丧失;当

我们看到确定性的一面时，也不意味着非确定性不存在. 如果我们信仰数学只存在确定性的一面，在事实的面前，这种信仰本身可能会遭到动摇.

哥德尔(Godel) 的不完备性定理表明，现有的在数论中提出的问题，现有的数论理论并不能予以回答，这种可能性是肯定存在的.

对于不定方程，将采用非决定论的思想和方法，揭示其内在的必然的规律. 受非决定论支配的不定方程，可能比我们预想的要多得多.

五、非欧几何的建立与公理的不言自明

罗巴切夫斯基(Lobachevsky) 和鲍耶(Bolyai) 建立了非欧几何. 我们都知道欧几里得(Euclid) 平面几何. 欧几里得几何有一条等价的公设：过直线外一点只能作一条直线与原有的直线平行. 这条公设的否命题的几何学在逻辑上也是合理的，这就产生了非欧几何. 伟大的数学家高斯也发现了非欧几何，但是，由于担心引起非议，他没有将自己的发现发表. 后来，高斯的学生黎曼(Riemann) 等对非欧几何作出了更全面更深入的研究和发展. 罗巴切夫斯基和鲍耶发现了非欧几何，特别是罗巴切夫斯基，他将他的一生奉献给了非欧几何.

爱因斯坦(Einstein) 建立的引力理论与非欧几何联系在一起，在那个时代是一件不可思议的事情，在我们的思想里产生的非欧几何与物质运动的空间深刻地联系在一起.

非欧几何的建立以及非欧几何建立的初期，许多数学家的困惑，或多或少动摇了人们对公理和公设不言自明的信念.

关于不定方程，将利用非决定论的思想，采用公理化的方法建立一般的理论.

六、对新的数学理论的一个基本要求

对于一个新的数学理论，如果它可以用来处理已有明确结论的数学问题，那么，新的数学理论所得到的结果，必须与已有的结论相一致. 笛卡尔(Descartes) 发展了解析几何，很显然，解析几何所得结果与平面几何所得结果应一致. 在微积分建立之前，人们已经会求正方形、长方形和球的体积，因此，用微积分求出的正方形、长方形和球的体积必须与当时已知的结果一致.

解决不定方程问题的新的数学理论，在处理一些已有结果的不定方程时所获得的结果，必须与已知的结果一致，这是对新的数学理论的一个基本要求. 满足这个基本要求的理论并不一定正确，但具有一定的可信性. 关于某些不定方程，现有的理论已获得许多重要的结果. 新的理论来处理这些已有结果的不定方程时，也获得了同样的结果，读者会在下一章看到这一点.

1993 年，哈佛大学的贾弗(Jaffe) 和弗吉尼亚理工学院的奎因(Quinn) 在美国数学会的《公报》上发表了一篇文章《理论数学——数学和理论物理的文化综合》，他们认为在杂志上可以发表未加证明的“推测”性的数学论文，完成“理论数学”和“证明数学’的分工. 阿蒂亚(Atiyah)、麦克莱恩(Maclane)、托姆(Thom)、芒德布罗(Mandelbrot)、瑟斯顿(Thurston) 等一大批世界数学大师对此发表了看法. 阿蒂亚等多数名家赞同贾弗和奎因所提出的问题，麦克莱恩等数学家则表示了反对.

我个人认为，数学最终需要严格，但是，一个重要的新的理论或新的思想和方法，可以发表，由更多的人来检验与完善它. 我们知道，现代的飞机

生产一定有严格的质量把关，安全是第一，但是对于莱特兄弟而言，最重要的是让飞机飞起来.

牛顿建立微积分，是不够严格的，但是，微积分的历史作用是巨大的，对现代其他科学和数学本身产生了深远的影响. 对于早期的级数的理论，也存在不严格的的地方，甚至错误的地方. 欧拉的一些重要发现也不是严格的. 不够严格的数学理论会逐步完善. 微积分的严格化在 19 世纪由数学家柯西(Cauchy) 等完成. 其他的科学也是如此. 意义深远的新思想新方法，可能需要更多的更长时间的完善. 人类对整个世界的认识是逐步完善的.

第七章　关于不定方程的新理论

高斯在1816年给朋友的一封信中写道:“我的确承认,费马大定理作为一个孤立的命题对我没有多少兴趣,因为可以容易地提出许多那样的命题,人们既不能证明它也不能否定它.”在不定方程中,全世界数学家花了三百年时间,解决了三个未知数的不定方程,四个和四个以上的未知数的不定方程,我们没有合适的理论来处理这些问题.

欧拉作了一个类比的猜测:$x_1^n+x_2^n+\cdots+x_{k-1}^n=x_k^n,n\geqslant k,k\geqslant 3$不定方程无正整数解解. $n<k$,不定方程有正整数解.费马大定理指的是$k=3$.欧拉的这一天才的类比,体现了“统一的思想”,是新理论的一个重要基础.

牛顿和莱布尼茨建立微积分,“微”和“积”,找到了事物的共性.不定方程的共性是什么?是“不定”.这也是新理论的又一个重要基础.

20世纪初,普朗克(Planck)、爱因斯坦、玻尔(Bohr)、狄拉克(Dirac)、海森堡、薛定谔(E. Schrodinger)等建立了量子论.我们的世界有确定性的一面,也有不确定性的一面,它们是对立的,也是统一的.数学世界,特别是不定方程,是不是也是这样呢?如果是这样,那么,不定方程需要这个新的思想作为它的基础.思想确定后,需要的是找到方法来处理不定方程.

“简单、统一、和谐”是新的理论追求的目标.

一、关于不定方程无解的一个判定方法

我们根据现有的数学理论，给出不定方程无解的一个判定方法.

1. $m = x_1^{2n+1} + x_2^{2n+1} + x_3^{2n+1} + \cdots + x_{2n+1}^{2n+1}, m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}$.

$n = 1, m = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$,(A)

$(3R_1 + 1)^3$ 被 9 整除，余数为 1，

$(3R_2 + 2)^3$ 被 9 整除，余数为 8，

$(3R_3)^3$ 被 9 整除，余数为 0.

下面来考察 $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ 之和被 9 整除后的余数，对于不定方程(A)，显然有：

(1) $0 + 0 + 0 = 0$,

(2) $0 + 0 + 1 = 1$,

(3) $0 + 1 + 1 = 2$,

(4) $1 + 1 + 1 = 3$,

(5) $0 + 0 + 8 = 8$,

(6) $0 + 8 + 8 = 9 + 7$,

(7) $8 + 8 + 8 = 2 \times 9 + 6$,

(8) $1 + 8 + 0 = 9 + 0$,

(9) $1 + 8 + 8 = 9 + 8$,

(10) $1 + 1 + 8 = 9 + 1$.

由上可以看到，$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ 之和被 9 整除的余数为 0、1、2、3、6、7、8，但没有 4 和 5，因此 $m = 9k + 4, m = 9k + 5$ 时方程(A) 无解，$k \in \mathbf{Z}$. 取 $k = 0$，

我们有 $x_1^3+x_2^3+x_3^3=4$ 及 $x_1^3+x_2^3+x_3^3=5$ 没有整数解.

$m=x_1^5+x_2^5+x_3^5+x_4^5+x_5^5$,(B)

$(5R_1+1)^5$、$(5R_2+2)^5$、$(5R_3+3)^5$、$(5R_4+4)^5$、$(5R_5)^5$ 被 25 整除的余数依次为 1,7,18,24,0,下面来讨论 $x_1^5+x_2^5+x_3^5+x_4^5+x_5^5$ 之和被 25 整除后的余数.

(1)$0+0+0+1+24=25+0$,

(2)$0+0+0+0+1=1$,

(3)$0+0+0+1+1=2$,

(4)$0+0+1+1+1=3$,

(5)$0+1+1+1+1=4$,

(6)$1+1+1+1+1=5$,

(8)$7+0+0+0+0=7$,

(9)$7+1+0+0+0=8$,

(10)$7+1+1+0+0=9$,

(11)$7+1+1+1+0=10$,

(12)$7+1+1+1+1=11$,

(13)$7+7+24+24+0=25\times2+12$,

(14)$7+7+24+0+0=25+13$,

(15)$7+7+0+0+0=14$,

(16)$7+7+1+0+0=15$,

(17)$7+7+1+1+0=16$,

(18)$7+7+1+1+1=17$,

(20)$18+1+0+0+0=19$,

(21)$18+1+1+0+0=20$,

(22) $18+1+1+1+0=21$,

(23) $18+1+1+1+1=22$,

(24) $7+7+7+1+1=23$,

(25) $24+0+0+0+0=24$.

我们看到它不像 $m=x_1^3+x_2^3+x_3^3$ 存在一些 m 的取值,根据整除性判定方程无解.是不是对任意整数 m,不定方程 $m=x_1^5+x_2^5+x_3^5+x_4^5+x_5^5$ 都有整数解呢?

$m=x_1^7+x_2^7+x_3^7+x_4^7+x_5^7+x_6^7+x_7^7$,(C)

$(7R_1+1)^7$、$(7R_2+2)^7$、$(7R_3+3)^7$、$(7R_4+4)^7$、$(7R_5+5)^7$、$(7R_6+6)^7$、$(7R_7)^7$ 被 49 整除后的余数分别为 1、30、31、18、19、48、0.

为节省篇幅,直接给出结论:m 不存在某些值,根据整除性判定方程(C) 无解.

$m=x_1^9+x_2^9+x_3^9+x_4^9+x_5^9+x_6^9+x_7^9+x_8^9+x_9^9$,(D)

$m=81k+10\sim17$ 不定方程(D) 无解,

$m=81k+37\sim44$ 不定方程(D) 无解,

$m=81k+64\sim71$ 不定方程(D) 无解.

说明:$10\sim17$ 表示 10 到 17 的正整数,其余类同.

$m=\sum_{i=1}^{11}x_i^{11}$,(E)

不存在 m 取某些值,根据整除性判定方程(E) 无解.

$m=\sum_{i=1}^{13}x_i^{13}$,(F)

不存在 m 取某些值,根据整除性判定方程(F) 无解.

$m=\sum_{i=1}^{15}x_i^{15}$,(G)

不存在 m 取某些值,根据整除性判定方程(G) 无解.

$m=\sum_{i=1}^{17}x_i^{17}$,(H)

不存在 m 取某些值,根据整除性判定方程(H) 无解.

$m=\sum_{i=1}^{19}x_i^{19}$,(I)

不存在 m 取某些值,根据整除性判定方程(I) 无解.

$m=\sum_{i=1}^{21}x_i^{21}$,(J)

$m=441k+22\sim27$,$m=441k+67\sim77$,$m=441k+119\sim176$,

$m=441k+218\sim223$,$m=441k+265\sim275$,$m=441k+316\sim321$,

$m=441k+364\sim375$,$m=441k+414\sim419$.

m 取上述值时,不定方程(J) 没有正整数解.

对于不定方程 $m=x_1^{2n+1}+x_2^{2n+1}+x_3^{2n+1}+\cdots+x_{2n+1}^{2n+1}$,根据 m 的某些取值,通过整除性判定它没有整数解是非常简单的,但 n 的取值越来越大时,计算量会迅速增大.

下面来讨论指数为偶数的情况:

2. $m=x_1^{2n}+x_2^{2n}+\cdots+x_{2n-1}^{2n}-x_{2n}^{2n}$,$m\in\mathbf{Z}$,$n\in\mathbf{N}$.

先看 $n=1$,$m=x_1^2-x_2^2$,(K)

$(2k_1+1)^2$,$(2k_2)^2$ 被 4 整除的余数为 1、0,$x_1^2-x_2^2$ 被 4 整除后的余数如下:

(1)$0-0=0$,

(2)$0-1=4\times(-1)+3$,

(3)$1-1=0$,

(4)$1-0=1$.

由此知 $4k+2=x_1^2-x_2^2$ 没有整数解.

$m = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - x_4^4$,(L)

$m = 16k+4, 16k+5, 16k+6, 16k+7, 16k+8, 16k+9, 16k+10, 16k+11, 16k+12, 16k+13, 16k+14$ 时不定方程(L)没有整数解.

$m = x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 + x_4^6 + x_5^6 - x_6^6$,(M)

$m = 36k+6, m = 36k+7, m = 36k+15, m = 36k+16, m = 36k+24, m = 36k+25, m = 36k+33, m = 36k+34$ 时不定方程(M)没有整数解.

$m = x_1^8 + x_2^8 + x_3^8 + x_4^8 + x_5^8 + x_6^8 + x_7^8 - x_8^8$,(N)

$m = 64k+8 \sim 30$ 及 $m = 64k+40 \sim 62$ 时不定方程(N)没有整数解.

$m = \sum_{i=1}^{9} x_i^{10} - x_{10}^{10}$,(O)

$m = 100k+10 \sim 22, m = 100k+33 \sim 46, m = 100k+58 \sim 71, m = 100k+85 \sim 94$ 时不定方程(O)没有整数解.

$m = \sum_{i=1}^{11} x_i^{12} - x_{12}^{12}$,(P)

$m = 144k+12 \sim 16, m = 144k+28 \sim 46, m = 144k+57 \sim 63, m = 144k+75 \sim 79, m = 144k+92 \sim 97, m = 144k+107 \sim 126, m = 144k+138 \sim 142$ 时不定方程(P)没有整数解.

$m = \sum_{i=1}^{13} x_i^{14} - x_{14}^{14}$,(Q)

$(14R_1+1)^{14}, (14R_2+2)^{14}, \cdots, (14R_{13}+13)^{14}, (14R_{14})^{14}$ 被196整除后的余数依次为1,116,117,128,165,148,49,148,165,128,177,116,1,0, $\sum_{i=1}^{13} x_i^{14} - x_{14}^{14}$ 被196整除后的余数可以是 $0 \sim 195$ 中的任意一个数. 不存在 m 取某些值,根据整除性判定方程(Q)无整数解. 是不是对所有的整数 m,不定方程(Q)都有整数解呢?

需要指出,整除性与不定方程的解数分布规律可能存在一定的联系. 例如,在后面的章节导出了 $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = x_4^4$ 的解数分布规律为 $N(m) \sim$

$\frac{c_4}{4\times 2!}\ln m$，其中系数 c_4 可能与整除性有一定的关系，需要进一步的研究.

这里所作的讨论，是简单的，也是很小的一部分. 在后面，我们要讨论的问题，需要决定论的理论和非决定论的理论统一.

二、不定方程的平凡解

(1) 没有常数项的多项式不定方程，其解有公约数的为平凡解. $x^2+y^2=z^2$，$3^2+4^2=5^2$，$(3m)^2+(4m)^2=(5m)^2$，$m\geqslant 2$，$m\in\mathbf{N}$，$3m,4m,5m$ 为方程的平凡解.

(2) 不定方程的对称解为平凡解. $w^4+v^4=x^4+y^4$，$x=w$，$y=v$ 便是方程的平凡解. $2^4+1^4=1^4+2^4$ 为平凡解，$133^4+134^4=59^4+158^4$ 为非平凡解.

(3) 由 ${x_1}^{m_1}{x_2}^{m_2}\cdots{x_n}^{m_n}=y^m$ 及类似的方程导出的解为平凡解. $x_1^5x_2^7=y^9$，我们得到 $x_1=t^9$，$x_2=s^9$，$y=t^5s^7$ 为方程的平凡解.

对于不定方程，$x_1^5x_2^7=y^9+31$，只有有限个整数解. 而 $x_1^5x_2^7=y^9$ 有无限多的平凡解.

(4) 由某些恒等式导出的不定方程的解为平凡解. $x^4+4y^3+6y^2+4y+1=z^4$，将不定方程改写为：$x^4+(y+1)^4-y^4=z^4$，$x=y=t$，$z=t+1$ 为方程的平凡解. $x^4+4y^3+6y^2+4y-14=z^4$，将不定方程改写为：$x^4+(y+1)^4=z^4+y^4+15$，$x=z=t$，$y=1$ 为不定方程的平凡解.

(5) 对于不定方程 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的指数是 n. 记 $x_1=g_1(t)$，$x_2=g_2(t)$，$\cdots$，$x_n=g_n(t)$. 则 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=h(t)$. 若 $h(t)\equiv 0$，则 $x_1=g_1(t)$，$x_2=g_2(t)$，$\cdots$，$x_n=g_n(t)$ 为不定方程的平凡解.

$x^3+y^3+z^3=2$，$x=1+6t^3$，$y=1-6t^3$，$z=6t^2$，根据定义为不定方

程的平凡解.

由 $2C^3 = x^3 + y^3 + z^3$ 导出的解 $x = 6t^2C, y = (6t^3 + 1)C, z = (-6t^3 + 1)C$ 为平凡解.

在这里我们讨论了一些平凡解,是为了后面讨论问题的方便.

三、不定方程的解数

不定方程的解数:不定方程非平凡解的数目.

例如:$x^2 + y^2 = z^2, 1 \leqslant z \leqslant 17$ 时,非平凡解为 $3^2 + 4^2 = 5^2, 5^2 + 12^2 = 13^2, 15^2 + 8^2 = 17^2$,$z \leqslant 17$ 时不定方程的解数为 3. $1 \leqslant z \leqslant 25$ 时,还有 $7^2 + 24^2 = 25^2$,$z \leqslant 25$ 时不定方程的解数为 4.

四、最简多项式不定方程 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$

整系数多项式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$ 在有理集上不可以分解因式,称 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$ 为最简多项式不定方程.

整系数的多项式不定方程 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$ 可以在有理集上分解因式,那么,$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$ 可以转化为若干最简多项式不定方程求解.

$x^4 - 4x^2y^2 + 4y^4 - 2$ 在有理集上不可以分解因式,根据图埃定理,我们知道方程 $x^4 - 4x^2y^2 + 4y^4 - 2 = 0$ 只有有限个解,事实上一组整数解都没有.

$x^4 - 4x^2y^2 + 4y^4 - 1$ 在有理集上可以分解因式,根据图埃定理并不能判定它只有有限组解,事实上,$x^4 - 4x^2y^2 + 4y^4 - 1 = 0$ 变为$(x^2 - 2y^2 -$

1)$(x^2-2y^2+1)=0$,方程有无数组解.

五、最简多项式不定方程的分类

下面将最简多项式不定方程进行分类,以便问题的讨论.

第一类最简多项式不定方程:若最简多项式不定方程 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$ 已被逻辑证明无整数解或仅有有限组整数解,则称不定方程为第一类最简多项式不定方程.

$2x_1^4+2x_2^4+2x_3^4=2x_4^4+1$ 为第一类最简多项式不定方程,显然它没有一组整数解. $x^2-y^2=3$,只有两组整数解,为第一类最简多项式不定方程.

根据前面的结果,我们由 $x_1^4+x_2^4+x_3^4-x_4^4=16k+4$ 没有整数解,得到 $x_1^4+x_2^4+x_3^4=x_4^4+4$ 没有整数解. $x_1^4+x_2^4+x_3^4=x_4^4+4$ 也为第一类最简多项式不定方程.

第二类最简多项式不定方程:最简多项式不定方程 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$ 已被逻辑证明有无限组整数解,则称不定方程为第二类最简多项式不定方程.

第三类最简多项式不定方程:最简多项式不定方程不属于第一类和第二类最简多项式不定方程,则称它为第三类最简多项式不定方程.

六、最简多项式不定方程 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$ 的解数

最简多项式不定方程 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$ 的非平凡解的数目称为最简多项式不定方程 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$ 的解数.

七、最简多项式不定方程的量子解及量子解数

最简多项式不定方程$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$，当$x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$取一组整数$x_{11},x_{21},\cdots,x_{(n-1)1}$，令$g(x_n)=f(x_{11},x_{21},\cdots,x_{(n-1)1},x_n)$，记$g(x_n)=0$的$x_n$最大实数解为$x_{n1}$，$P_1=\dfrac{1}{|g(x_{n1}+1)|}$为不定方程的量子解，$g(x_n)=0$没有实数解，记$P_1=0$.

量子解的含义是指不定方程$g(x_n)=0$时，x_n可能是整数的概率，当然也可以用其他的表现形式.

量子解数：最简多项式不定方程$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$，量子解之和为不定方程的量子解数.

八、基本公设

公设1：对于第一类和第二类最简多项式不定方程，若量子解数有限，则不定方程的解数有限.

公设2：对于第二类和第三类最简多项式不定方程，若量子解数无限，则不定方程的解数正比于量子解数.

由公设2得：

推论1：对于第二类和第三类最简多项式不定方程，不定方程的解数分布规律为$c\sum_{i=1}^{+\infty}P_i$，不同的问题，可取不同的c值.

九、新的数学理论的运用

关于不定方程，现有的数学理论已获得了许多重要的结果，用新的数

学理论来讨论这些问题，所获得的结果应该与现有的理论所获得的结果一致．新的数学理论会得到新的结果，它的真理性要接受实践的检验．

1. 对已有结论的数学问题用新的理论来讨论

图埃(Thue)定理：$n \geqslant 3$，$f(u)=a_0u^n+a_1u^{n-1}+\cdots+a_{n-1}u+a_n$ 是一个整系数多项式，它在有理集上不能因式分解，则不定方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}y+\cdots+a_{n-1}xy^{n-1}+a_ny^n=C$ 仅有有限组整数解 x,y，C 为已知的不等于零的整数．

先讨论 $n=3$，$a_0x^3+a_1x^2y+a_2xy^2+a_3y^3-C=0$．

$y=y_1$ 时，令 $g(x)=a_0x^3+a_1x^2y_1+a_2xy_1^2+a_3y_1^3-C$．

x_1 是 $g(x)=0$ 的一个最大实数解．

$g(x_1)=a_0x_1^3+a_1x_1^2y_1+a_2x_1y_1^2+a_3y_1^3-C=0$，此时量子解为 $\dfrac{1}{|g(x_1+1)|}$．

$$
\begin{aligned}
&g(x_1+1)\\
&=a_0(x_1+1)^3+a_1(x_1+1)^2y_1+a_2(x_1+1)y_1^2+a_3y_1^3-C\\
&=a_0x_1^3+3a_0x_1^2+3a_0x_1+a_0+a_1x_1^2y_1+2a_1x_1y_1+a_1y_1+a_2x_1y_1^2+a_2y_1^2\\
&\quad+a_3y_1^3-C\\
&=a_0x_1^3+a_1x_1^2y_1+a_2x_1y_1^2+a_3+y_1^3-C+3a_0x_1^2+3a_0x_1+a_0+2a_1x_1y_1\\
&\quad+a_1y_1+a_2y_1^2\\
&=3a_0x_1^2+3a_0x_1+a_0+2a_1x_1y_1+a_1y_1+a_2y_1^2.
\end{aligned}
$$

当 y_1 足够大时，$g(x_1+1)\sim 3a_0x_1^2+2a_1x_1y_1+a_2y_1^2$．

由于 $\lim\limits_{y_1\to+\infty}\dfrac{x_1}{y_1}=u_1$，$u_1$ 是 $f(u)=0$ 的最大实根．

$g(x_1+1)\sim 3a_0(y_1u_1)^2+2a_1(y_1u_1)y_1+a_2y_1^2$

$= (3a_0u_1^2 + 2a_1u_1 + a_2)y_1^2$,

$$\frac{1}{|g(x_1+1)|} \sim \frac{1}{|3a_0u_1^2+2a_1u_1+a_2|y_1^2}, \sum_{y_1=1}^{+\infty} \frac{1}{|3a_0u_1^2+2a_1u_1+a_2|y_1^2}$$

收敛.不定方程量子解数有限,故方程的解数有限.

$C = 0$ 时,$\frac{x}{y}$ 为 $f(u) = 0$ 的一个根,$f(u) = 0$ 的根均为无理数,故不可能有整数 x, y 使$\frac{x}{y}$ 为无理数.对于一般的情形,y_1 足够大,$y_1 \geqslant m$.

$g(x_1+1) \sim na_0x_1^{n-1} + (n-1)a_1x_1^{n-2}y_1 + (n-2)a_2x_1^{n-3}y_1^2 + \cdots + a_{n-1}y_1^{n-1}$.

$\lim\limits_{y_1 \to +\infty} \frac{x_1}{y_1} = u_1$,$u_1$ 是 $f(u) = 0$ 的最大实根.

$g(x_1+1) \sim [na_0u_1^{n-1} + (n-1)a_1u_1^{n-2} + (n-2)a_2u_1^{n-3} + \cdots + a_{n-1}]y_1^{n-1}$ $= Ay_1^{n-1}$,A为常数.$\frac{1}{|g(x_1+1)|} \sim \frac{1}{|A||y_1^{n-1}|}$,显然,$\sum\limits_{y_1=m}^{+\infty} \frac{1}{|A||y_1^{n-1}|}$,$n \geqslant 3$ 时收敛,量子解数有限,故不定方程确定解数有限.

$n = 2$ 时,对于第二类最简不定方程,$\sum\limits_{y_1=1}^{m} \frac{1}{|A||y_1^{2-1}|} \sim \frac{1}{|A|}\ln m$,故确定解数分布规律为 $N(n) \sim c\ln m$,这正是我们第二章讨论的二元二次方程的分布规律.用新的理论导出的分布规律与我们已知的分布规律是一致的.

虽然图埃定理是关于两个未知元不定方程的一个普遍性的结果,但还是有许多两个未知元的不定方程并不在图埃定理的讨论范围内.

(1)$x^2 = 2y^4 - 1$ 是否存在无限多组正整数解?

数学家伦格(Ljunggren)已经证明了不定方程 $x^2 = 2y^4 - 1$ 只有有限组整数解.$x_1 = 1, y_1 = 1$;$x_2 = 239, y_1 = 13$ 是方程的整数解.

解:下面来讨论这一问题.

y 取 y_1,$x_1^2 = 2y_1^4 - 1$,$x_1 \in \mathbf{N}$,$y_1 \in \mathbf{N}$.

$g(x_1) = x_1^2 - 2y_1^4 + 1 = 0$.

$$
\begin{aligned}
g(x_1 + 1) &= (x_1 + 1)^2 - 2y_1^4 + 1 \\
&= x_1^2 + 2x_1 + 1 - 2y_1^4 + 1 \\
&= x_1^2 - 2y_1^4 + 1 + 2x_1 + 1 \\
&= 2x_1 + 1.
\end{aligned}
$$

量子解$\dfrac{1}{|g(x_1+1)|} = \dfrac{1}{2x_1+1} < \dfrac{1}{2x_1} = \dfrac{1}{2\sqrt{2y_1^4 - 1}}$.

$\sum\limits_{y_1=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{2y_1^4-1}}$ 收敛,故量子解数有限,方程只有有限组正整数解.

(2)$x^4 = y^3 + 17$ 是否有无限多组正整数解?

解:设 y_1 是 y 的一个取值,$y_1 \in \mathbf{N}$,$x_1^4 = y_1^3 + 17$,$x_1 \in \mathbf{N}$.

$$
\begin{aligned}
g(x_1 + 1) &= (x_1 + 1)^4 - y_1^3 - 17 \\
&= x_1^4 + 4x_1^3 + 6x_1^2 + 4x_1 + 1 - y_1^3 - 17 \\
&= x_1^4 - y_1^3 - 17 + 4x_1^3 + 6x_1^2 + 4x_1 + 1 \\
&= 4x_1^3 + 6x_1^2 + 4x_1 + 1
\end{aligned}
$$

量子解为$\dfrac{1}{|g(x_1+1)|} = \dfrac{1}{4x_1^3 + 6x_1^2 + 4x_1 + 1} < \dfrac{1}{4x_1^3} < \dfrac{1}{4(y_1^{\frac{3}{4}})^3}$

$$= \frac{1}{4y_1^{\frac{9}{4}}}.$$

$\sum\limits_{y_1=1}^{+\infty} \dfrac{1}{4y_1^{\frac{9}{4}}}$ 收敛,故不定方程量子解数有限,不定方程的解数有限.

$x = 3$,$y = 4$ 是方程的一组正整数解.

(3)$x^4 + x = 2y^3 + 16$ 是否存在无限多组正整数解?

解:$x_1^4+x_1=2y_1^3+16, x_1\in\mathbf{N}, y_1\in\mathbf{N}.$

$g(x_1)=x_1^4+x_1-2y_1^3-16=0.$

$$g(x_1+1)=(x_1+1)^4+(x_1+1)-2y_1^3-16$$
$$=x_1^4+4x_1^3+6x_1^2+4x_1+1+x_1+1-2y_1^3-16$$
$$=4x_1^3+6x_1^2+4x_1+2>4x_1^3>4y_1^{\frac{9}{4}}.$$

$$\frac{1}{|g(x_1+1)|}<\frac{1}{4x_1^3}<\frac{1}{4y_1^{\frac{9}{4}}}.$$

$\sum\limits_{y=1}^{+\infty}\frac{1}{4y_1^{\frac{9}{4}}}$ 收敛,不定方程仅有有限组正整数解.注意到$\sum\limits_{y=1}^{+\infty}\frac{1}{4y_1^{\frac{9}{4}}}<1$,

量子解数小于1. $x=2, y=1$ 是方程的一组解.

(4)$x^3=2y_1^2-1$ 是否有无限多组正整数解.

解:$x^3=2y_1^2-1, x_1\in\mathbf{N}, y_1\in\mathbf{N}.$

$g(x_1)=x_1^3-2y_1^2+1=0,$

$$g(x_1+1)=(x_1+1)^3-2y_1^2+1$$
$$=x_1^3+3x_1^2+3x_1+1-2y_1^2+1$$
$$=3x_1^2+3x_1+1>3x_1^2,$$

量子解$\frac{1}{|g(x_1+1)|}<\frac{1}{3x_1^2}=\frac{1}{3\sqrt[3]{(2y_1^2-1)^2}}$,$\sum\limits_{y_1=1}^{+\infty}\frac{1}{3\sqrt[3]{(2y_1^2-1)^2}}$ 收敛,方程只有有限组正整数解. $x_1=1, y_1=1$;$x_2=23, y_2=78$ 是方程的解.

2. 法尔廷斯(Faltings)证明了莫德尔(Mordell)猜想之后给出了一个推论,$x^n+y^n=z^n, n\geqslant 4$ 只有有限组正整数解

下面用新的数学理论来推导这一结果.

解:设 $x\leqslant m, y\leqslant m, m\in\mathbf{N}.$

根据前面的排列组合知识有：

(1,1)

(2,1) (2,2)

(3,1) (3,2) (3,3)

…

$(m,1)$ $(m,2)$ $(m,3)$ … (m,m)

$g(z_i)=z_i^n-x_i^n-y_i^n=0.$

$g(z_i+1)=(z_i+1)^n-x_i^n-y_i^n$

$$=C_n^1 z_i^{n-1}+C_n^2 z_i^{n-2}+\cdots+nz_i+1>nz_i^{n-1},$$

量子解为$\frac{1}{|g(z_i+1)|}<\frac{1}{nz_i^{n-1}}$，

$g(z_1)=z_1^n-1^n-1^n=0$，

$g(z_2)=z_2^n-2^n-1^n=0$，

$g(z_3)=z_3^n-2^n-2^n=0$，

$g(z_4)=z_4^n-3^n-1^n=0$，

$g(z_5)=z_5^n-3^n-2^n=0$，

$g(z_6)=z_6^n-3^n-3^n=0$，

…

$z_1^n=1^n+1^n=2, z_1=\sqrt[n]{2}>1$，

$z_2^n=2^n+1^n, z_2>2$，

$z_3^n=2^n+2^n, z_3>2$，

$z_4^n=3^n+1^n, z_4>3$，

$z_5^n=3^n+2^n, z_5>3$，

$z_6^n=3^n+3^n, z_6>3$，

…

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{|g(z_i+1)|}<\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{nz_i^{n-1}}<\frac{1}{n}(\frac{1}{\sqrt[n]{2^{n-1}}}\times 1+\frac{1}{2^{n-1}}\times 2+\frac{1}{3^{n-1}}\times 3+$$

$$\cdots+\frac{1}{m^{n-1}}\times m+\cdots)$$

$$=\frac{1}{n}(1+\frac{1}{2^{n-2}}+\frac{1}{3^{n-2}}+\cdots+\frac{1}{m^{n-2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[n]{2^{n-1}}}-1).$$

$n\geqslant 4$ 时，级数收敛，量子解数有限，方程解数有限.

对于 $n=3$，$x^3+y^3=z^3$ 没有正整数解，新的数学理论并不能判定它只有有限组正整数解.

$x^4+y^4=z^4+a$，对于任何整数 a，新的数学理论指出，不定方程只有有限组正整数解. $x^3+y^3=z^3+a$，存在许多整数 a，方程有无限个正整数解. $x^3+y^3=z^3+4$ 没有正整数解，前面已经讨论过.

下面来讨论几个类似的问题.

(1) $x^n+y^n=z^{n+2}$ 有无限多组正整数解吗? $n\geqslant 3$.

解：$z_i^{n+2}=x_i^n+y_i^n$，

$g(z_i)=z_i^{n+2}-x_i^n-y_i^n$，

$g(z_i+1)=(z_i+1)^{n+2}-x_i^n-y_i^n>(n+2)z_i^{n+1}$，

量子解为 $\frac{1}{|g(z_i+1)|}$，量子解数为 $\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{|g(z_i+1)|}$，由排列组合知识有 $x_i\leqslant m$，$y_i\leqslant m$，$m\in\mathbf{N}$.

(1,1)

(2,1)　(2,2)

(3,1)　(3,2)　(3,3)

…

$(m,1)$　$(m,2)$　$(m,3)$　…　(m,m)

$g(z_1)=z_1^{n+2}-1^n-1^n=0, z_1>1,$

$g(z_2)=z_2^{n+2}-2^n-1^n=0, z_2>2^{\frac{n}{n+2}},$

$g(z_3)=z_3^{n+2}-2^n-2^n=0, z_3>2^{\frac{n}{n+2}},$

$g(z_4)=z_4^{n+2}-3^n-1^n=0, z_4>3^{\frac{n}{n+2}},$

$g(z_5)=z_5^{n+2}-3^n-2^n=0, z_5>3^{\frac{n}{n+2}},$

$g(z_6)=z_6^{n+2}-3^n-3^n=0, z_6>3^{\frac{n}{n+2}},$

…

$$\sum_{i=1}^{\frac{m(m+1)}{2}}\frac{1}{|g(z_i+1)|}<\sum_{i=1}^{\frac{m(m+1)}{2}}\frac{1}{(n+2)z_i^{n+1}}<\frac{1}{n+2}(1+2\times\frac{1}{2^{\frac{(n+1)n}{n+2}}}+3\times\frac{1}{3^{\frac{(n+1)n}{n+2}}}+\cdots+m\times\frac{1}{m^{\frac{(n+1)n}{n+2}}})$$

$$=\frac{1}{n+2}(1+\frac{1}{2^{\frac{n^2-2}{n+2}}}+\frac{1}{3^{\frac{n^2-2}{n+2}}}+\cdots+\frac{1}{m^{\frac{n^2-2}{n+2}}}),$$

$n\geqslant 3, \frac{n^2-2}{n+2}=n-2+\frac{2}{n+2}>1, \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{|g(z_1+1)|}$ 在 $n\geqslant 3$ 时收敛，量子解数有限，确定解数有限.

(2) 不定方程 $x^n+y^n=z^n+1, n\geqslant 4$，对确定的 n 而言，方程仅有有限组非平凡解.

解：$x^n=z^n$ 或 $y^n=z^n$ 为方程的平凡解.

$z_i^n+1=x_i^n+y_i^n,$

$g(z_i)=z_i^n+1-x_i^n-y_i^n,$

$g(z_i+1)=(z_i+1)^n+1-x_i^n-y_i^n>nz_i^{n-1},$

量子解为 $\frac{1}{|g(z_i+1)|}<\frac{1}{nz_i^{n-1}}$，由排列组合知识有 $x\leqslant m, y\leqslant m, m\in\mathbf{N}$,

(1,1)

(2,1)　(2,2)

(3,1)　(3,2)　(3,3)

…

$(m,1)$　$(m,2)$　$(m,3)$　…　(m,m)

$z_1^n+1=1^n+1^n, z_1=1,$

$z_2^n+1=2^n+1^n, z_2=2,$

$z_3^n+1=2^n+2^n, z_2>2,$

$z_4^n+1=3^n+1^n, z_4=3,$

$z_5^n+1=3^n+2^n, z_5>3,$

$z_6^n+1=3^n+3^n, z_6>3,$

…

$$\sum_{i=1}^{m(m+1)}\frac{1}{|g(z_i+1)|}<\sum_{i=1}^{m(m+1)}\frac{1}{nz_i^{n-1}}<\frac{1}{n}(1+2\times\frac{1}{2^{n-1}}+3\times\frac{1}{3^{n-1}}+\cdots+m<\frac{1}{m^{n-1}})$$

$$=\frac{1}{n}(1+\frac{1}{2^{n-2}}+\frac{1}{3^{n-2}}+\cdots+\frac{1}{m^{n-2}}).$$

$n\geqslant 4, m\to+\infty$ 时，上述级数收敛，不定方程只有有限组正整数解.

(3)$x^2+y^2=z^n, n\geqslant 2$，不定方程是否有无限多正整数解呢？

解：$z_i^n=x_i^2+y_i^2$，

$g(z_i)=z_i^n-x_i^2-y_i^2=0,$

$g(z_i+1)=(z_i+1)^n-x_i^2-y_i^2.$

量子解为$\frac{1}{|g(z_i+1)|}$，由排列组合知识有：

(1,1)

(2,1) (2,2)

(3,1) (3,2) (3,3)

…

(m,1) (m,2) (m,3) … (m,m)

$g(z_1)=z_1^n-1^2-1^2, 1<z_1\leqslant\sqrt[n]{2}$,

$g(z_2)=z_2^n-2^2-1^2, 2^{\frac{2}{n}}<z_2<\sqrt[n]{2}\times 2^{\frac{2}{n}}$,

$g(z_3)=z_3^n-2^2-2^2, z^{\frac{2}{n}}<z_3\leqslant\sqrt[n]{2}\times 2^{\frac{2}{n}}$,

$g(z_4)=z_4^n-3^2-1^2, 3^{\frac{2}{n}}<z_4<\sqrt[n]{2}\times 3^{\frac{2}{n}}$,

$g(z_5)=z_5^n-3^2-2^2, 3^{\frac{2}{n}}<z_5<\sqrt[n]{2}\times 3^{\frac{2}{n}}$,

$g(z_4)=z_6^n-3^2-3^2, 3^{\frac{2}{n}}<z_6<\sqrt[n]{2}\times 3^{\frac{2}{n}}$.

量子解数为$\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{|g(z_i+1)|}$.

$$\sum_{i=1}^{\frac{m(m+1)}{2}}\frac{1}{|g(z_i+1)|}<\frac{1}{nz_i^{n-1}}<\frac{1}{n}(1+\frac{2}{2^{\frac{2}{n}(n-1)}}+\frac{3}{3^{\frac{2}{n}(n-1)}}+\cdots+\frac{m}{m^{\frac{2}{n}(n-1)}})$$

$$=\frac{1}{n}(1+\frac{1}{2^{1-\frac{2}{n}}}+\frac{1}{3^{1-\frac{2}{n}}}+\cdots+\frac{1}{m^{1-\frac{2}{n}}})\sim 2m^{\frac{2}{n}},$$

$$\begin{aligned}g(z_i+1)&=(z_i+1)^n-x_i^2-y_i^2\\&=z_i^n+C_n^1z_i^{n-1}+C_n^2z_i^{n-2}+\cdots+1-x_i^2-y_i^2\\&=C_n^1z_i^{n-1}+C_n^2z_i^{n-2}+\cdots+1<2^nz_i^{n-1},\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{\frac{m(m+1)}{2}}\frac{1}{|g(z_i+1)|}>\frac{1}{2^nz_i^{n-1}}$$

$$>\frac{1}{2^n}\times\frac{1}{\sqrt[n]{2^{n-1}}}(1+\frac{2}{2^{\frac{2}{n}(n-1)}}+\frac{3}{3^{\frac{2}{n}(n-1)}}+\cdots+\frac{m}{m^{\frac{2}{n}(n-1)}}\sim\frac{n}{2^{\frac{n^2+2n-1}{n}}}\times m^{\frac{2}{n}}.$$

量子解数为$N(m)\sim Cm^{\frac{2}{n}}$, $m\to+\infty$,量子解数无限,不定方程的解数

无限.

下面给出不定方程 $x^2+y^2=z^n,n\geqslant 2$ 的参数解,其中 $i=\sqrt{-1}$.

$x=t^n+\mathrm{C}_n^2t^{n-2}(iu)^2+\mathrm{C}_n^4t^{n-4}(iu)^4+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-2k}(iu)^{2k}$,

n 为奇数,$2k=n-1$;n 为偶数,$2k=n$.

$y=\mathrm{C}_n^1t^{n-1}u+\mathrm{C}_n^3t^{n-3}i^2u^3+\mathrm{C}_n^{n-5}t^{n-5}i^4u^5+\cdots+\mathrm{C}_n^{2l+1}t^{n-(2l+1)}i^{2l}u^{2l+1}$,

n 为奇数,$2l+1=n$;n 为偶数,$2l+1=n-1$.

$z=t^2+u^2,i=\sqrt{-1},i^{4n+2}=-1,i^{4n}=1,t>u,t,u$ 一奇一偶,$(t,u)=1$.

设 $x+iy=(t+iu)^n,x-iy=(t-iu)^n$,即可求出上述参数解.

$n=3$ 时,$x^2+y^2=z^3,2^2+11^2=5^3$,

$x=t^3-3tu^2,y=3t^2u-u^3,z=t^2+u^2$.

$n=4$ 时,$x^2+y^2=z^4,7^2+24^2=5^4$,

$x=t^4-6t^2u^2+u^4,y=4t^3u-4tu^3,z=t^2+u^2$.

$n=5$ 时,$x^2+y^2=z^5,41^2+38^2=5^5$,

$x=t^5-10t^3u^2+5tu^4,y=5t^4u-10t^2u^3+u^5,z=t^2+u^2$.

方程的参数解表明 $x^2+y^2=z^n$ 有无限组解.

可进一步证明,$x^2+y^2=z^n$ 的解数分布规律为 $N(m)\sim\frac{1}{2\pi}m$,z 不超过 m. 事实上,$x^2+y^2=z^n$,在 x,y 不超过 m 的解数分布规律为 $N(m)\sim Cm^{\frac{2}{n}}$,设 z 不超过 m,可得 x,y 不超过 $m^{\frac{n}{2}}$,$N(m)\sim C(m^{\frac{n}{2}})^{\frac{2}{n}}=Cm$.

可以看到,用两种不同的方法求得的解数分布规律是一致的,只是新的数学理论不能定出 C 的具体数字而已.

3. 怀尔斯证明了费马大定理 $x^n+y^n=z^n$ 没有正整数解

下面用新的数学理论来讨论这个问题.

解：$z_i^n = x_i^n + y_i^n$，

$g(z_i) = z_i^n - x_i^n - y_i^n$，

$g(z_i + 1) = (z_i + 1)^n - x_i^n - y_i^n$，根据排列组合知识有：

(1,1)

(2,1)　(2,2)

(3,1)　(3,2)　(3,3)

…

$(m,1)$　$(m,2)$　$(m,3)$　…　(m,m)

$g(z_1) = z_1^n - 1^n - 1^n = 0, z_1 = \sqrt[n]{2} > 1$，

$g(z_1 + 1) = (z_1 + 1)^n - 1^n > 2^n - 2$，

$g(z_2) = z_2^n - 2^n - 1^n, z_2 > 2$，

$g(z_3) = z_3^n - 2^n - 2^n, z_2 > 2$，

$g(z_4) = z_4^n - 3^n - 2^n = 0, z_3 > 2$，

$g(z_5) = z_5^n - 3^n - 2^n, z_5 > 3$，

$g(z_6) = z_6^n - 3^n - 3^n, z_6 > 3$，

…

$$\sum_{i=1}^{\frac{m(m+1)}{2}} \frac{1}{|g(z_i + 1)|} < \frac{1}{2^n - 2} + \frac{1}{n}\left(2 \times \frac{1}{2^{n-1}} + 3 \times \frac{1}{3^{n-1}} + \cdots + m \times \frac{1}{m^{n-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2^n - 2} + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{3^{n-2}} + \cdots + \frac{1}{m^{n-2}}\right).$$

$n = 4$ 时，记 $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{|g(z_i + 1)|} = S_4$，

$n = 5$ 时，记 $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{|g(z_i + 1)|} = S_5$，

…

$n=k$ 时，记$\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{|g(z_i+1)|}=S_k$，

$$\sum_{j=4}^{k}S_j=S_4+S_5+S_6+\cdots+S_k.$$

根据级数的性质，S_k 都是有限的数，下面来讨论$\lim_{k\to+\infty}\sum_{j=4}^{k}S_j$ 的和.

$$\lim_{k\to+\infty}\sum_{j=4}^{k}S_j$$

$$=\sum_{k=4}^{+\infty}\frac{1}{2^k-2}+\sum_{k=4}^{+\infty}\frac{1}{k}\times\frac{1}{2^{k-2}}+\sum_{k=4}^{+\infty}\frac{1}{k}\times\frac{1}{3^{k-2}}+\cdots+\sum_{k=4}^{+\infty}\frac{1}{k}\times\frac{1}{m^{k-2}}+$$

$$\cdots$$

$$<\sum_{k=4}^{+\infty}\frac{1}{2^k-2}+\frac{1}{4}\sum_{k=4}^{+\infty}\frac{1}{2^k-2}+\frac{1}{4}\sum_{k=4}^{+\infty}\frac{1}{3^{k-2}}+\cdots+\frac{1}{4}\sum_{k=4}^{+\infty}\frac{1}{m^{k-2}}+\cdots$$

$$<\sum_{k=4}^{+\infty}\frac{1}{2^k-2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}}(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{m^2}+\cdots)$$

$$<\sum_{k=4}^{+\infty}\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{2}(\frac{\pi^2}{6}-1)$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{4}$$

$$<1.$$

$n\geqslant 4$ 时，不定方程 $x^n+y^n=z^n$ 的全部量子解数之和小于 1，对所有 n 而言，只有有限组正整数解，因此，必定存在一正整数 M，$n\geqslant M$ 时，$x^n+y^n=z^n$ 没有正整数解. 这一结果和怀尔斯的结论是相容的，当然，怀尔斯的结论更加明确和完美.

下面给出更一般的形式.

对任何整数 a，不定方程 $x^n+y^n=z^n+a$，$n\geqslant 4$，一定存在正整数 M，

$n \geqslant M$时，不定方程$x^n + y^n = z^n + a$没有非平凡正整数解. a值不同，M可能不同.

例如，$x^n + y^n = z^n + 12117361$，$n \geqslant 4$，一定存在正整数$M$，$n \geqslant M$时不定方程$x^n + y^n = z^n + 12117361$无正整数解，$n = 4$时，方程有解$x = 133$，$y = 134$，$z = 158$.

从某种意义上来说，$x^n + y^n = z^n$可视为$x^n + y^n = z^n + a$，$a = 0$的一个特例.

由于新的理论只能区分有限组解和无限组解，它并不能作出$x^n + y^n = z^n$在$n \geqslant 4$时没有一组解的结论. 但新的理论还是明确地指出，对所有的$n \geqslant 4$而言，方程只有有限组解.

4. $x^n + y^n = w^n + v^n$ 的正整数解

数学家已经证明了$n = 2, 3, 4$方程有无数组正整数解，$n = 2$时，$x^2 + y^2 = w^2 + v^2$，不考虑$x^2 = w^2$和$x^2 = v^2$这种平凡解. 设

$x = | c^2 + b^2 - a^2 - 2bc + 2ab |$,

$y = | c^2 + a^2 - b^2 - 2ac + 2ab |$,

$w = | -(a^2 + b^2 + c^2) + 2(a + b) + c |$,

$v = | c^2 - (a^2 + b^2) |$.

由于$(c^2 + b^2 - a^2 - 2bc + 2ab)^2 + (c^2 + a^2 - b^2 - 2ac + 2ab)^2$

$= (2ac + 2bc - a^2 - b^2 - c^2) + (c^2 - a^2 - b^2)^2$,

故$x^2 + y^2 = w^2 + v^2$有无限组非平凡解.

其中$a \in \mathbf{Z}$，$b \in \mathbf{Z}$，$c \in \mathbf{Z}$，$a \neq c$，$b \neq c$，$(a, b, c) = 1$. 如$5^2 + 5^2 = 7^2 + 1^2$，$8^2 + 7^2 = 3^2 + 11^2$.

对于$n = 3$，$x^3 + y^3 = w^3 + v^3$，哈代(Hardy)－拉玛努金(Ramanujan)

数 1729 满足 $10^3+9^3=12^3+1^3=1729$.

进一步的还有：

$167^3+436^3=228^3+423^3=87539319$,

$1926^3+1608^3=1939^3+1589^3=11302198488$.

$n=4, x^4+y^4=w^4+v^4$,

$133^4+134^4=59^4+158^4=635318657$.

下面来讨论 $x^n+y^n=w^n+v^n, n\geqslant 5$.

设 $x\leqslant m, y\leqslant m, m\in\mathbf{Z}$,根据前面的排列组合知识有：

(1,1)

(2,1)　(2,2)

(3,1)　(3,2)　(3,3)

…

$(m,1)$　$(m,2)$　$(m,3)$　$(m,4)$　…　(m,m)

$x_1^n+y_1^n=w_1^n+v_1^n, w_1^n=x_1^n+y_1^n-v_1^n$,

$g(w_1)=w_1^n-(x_1^n+y_1^n-v_1^n)$,

$g(w_i)=w_i^n-(x_i^n+y_i^n-v_i^n)$,

$$
\begin{aligned}
g(w_i+1)&=(w_i+1)^n-(x_i^n+y_i^n-v_i^n)\\
&=(w_i+1)^n-w_i^n+w_i^n-(x_i^n+y_i^n-v_i^n)\\
&=(w_i+1)^n-w_i^n>mw_i^n.
\end{aligned}
$$

不失一般性，设 $v\leqslant w$.

$w_1^n=2^n+1^n-1^n>n\times 1^{n-1}, w_1>1$,

$w_2^n=2^n+2^n-1^n>n\times 2^{n-1}, w_2>1$,

$w_3^n=3^n+1^n-2^n>n\times 2^{n-1}, w_3>2$,

$w_4^n=3^n+1^n-1^n>n\times 2^{n-1}, w_4>2$,

$w_5^n = 3^n + 2^n - 2^n > n \times 2^{n-1}, w_5 > 2,$

$w_6^n = 3^n + 2^n - 1^n > n \times 2^{n-1}, w_6 > 2,$

$w_7^n = 3^n + 3^n - 2^n > n \times 2^{n-1}, w_7 > 2,$

$w_8^n = 3^n + 3^n - 1^n > n \times 2^{n-1}, w_8 > 2,$

$w_9^n = 4^n + 1^n - 3^n > n \times 3^{n-1}, w_9 > 3,$

$w_{10}^n = 4^n + 1^n - 2^n > n \times 3^{n-1}, w_{10} > 3,$

…

$$\frac{1}{|g(w_i+1)|} < \frac{1}{nw_i^{n-1}},$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{|g(w_i+1)|} < \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{nw_i^{n-1}}$$

$$< \frac{1}{n}[1 \times 2 + \frac{1}{2^{n-1}} \times 2 \times 3 + \frac{1}{3^{n-1}} \times 3 \times 4 + \cdots + \frac{1}{m^{n-1}} \times m \times (m+1) + \cdots]$$

$$= \frac{1}{n}[1 \times 2 + \frac{3}{2^{n-2}} + \frac{4}{3^{n-2}} + \cdots + \frac{m+1}{m^{n-2}} + \cdots]$$

$$= \frac{1}{n}[1 + 1 + \frac{2+1}{2^{n-2}} + \frac{3+1}{3^{n-2}} + \cdots + \frac{m+1}{m^{n-2}} + \cdots]$$

$$= \frac{1}{n}[1 + \frac{1}{2^{n-3}} + \frac{1}{3^{n-3}} + \cdots + \frac{1}{m^{n-3}} + \cdots) + (1 + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{3^{n-2}} + \cdots + \frac{1}{m^{n-2}} + \cdots)].$$

$n \geqslant 5$ 时，上述级数之和收敛，量子解数有限，方程只有有限组解.

$n = 5$ 时，上述级数之和 $< \frac{2}{5} \times \frac{\pi^2}{6} < 0.7$.

数学家对不定方程 $x^5 + y^5 = w^5 + v^5$ 进行了研究，$x^5 + y^5 \leqslant 1.02 \times 10^{26}$，没有找到正整数解. 这个方程如果没有正整数解，根据量子解数的计算结果是很正常的.

对于不定方程 $x^6+y^6+z^6=w^6+u^6+v^6$ 以及 $x^5+y^5+z^5=w^5+u^5+v^5$，数学家布鲁德诺(Brudno)进行了研究，上述两个方程都有无限组正整数解.

根据新的数学理论，对于不定方程 $\sum_{i=1}^{m} x_i^n = \sum_{i=1}^{m} y_i^n$，

(1)$2m \geqslant n$ 时，不定方程有无限组正整数解；

(2)$2m < n$ 时，不定方程只有有限组正整数解.

5. 欧拉猜想

欧拉认为 $x_1^n+x_2^n+\cdots+x_{k-1}^n=x_k^n$，$n \geqslant k$ 时不定方程没有正整数解，$n<k$ 时不定方程有正整数解.

现在书上所指的欧拉猜想是指不定方程 $x_1^k+x_2^k+\cdots+x_{k-1}^k=x_k^k$，$k \geqslant 4$ 没有正整数解.

对于 $k=3$，$x_1^3+x_2^3=x_3^3$，欧拉给出了一个证明，方程没有正整数解. 在此基础上，欧拉作了一个类比：$x_1^k+x_2^k+\cdots+x_{k-1}^k=x_k^k$，$k \geqslant 4$ 时没有正整数解. 下面是欧拉的证明，摘自李文林主编的《数学瑰宝——历史文献精选》.

定理：不可能找到两个立方数，使其和或差是立方数.

首先考察以下事实：如果两个立方数的和不是一个数的立方，那么两个立方的差也不是. 实际上，如果 $x^3+y^3=z^3$ 是不可能的，那么 $z^3-y^3=x^3$ 也是不可能的. 现 $z^3-y^3=x^3$ 是两个立方的差，故如果一个命题成立，另一个同样成立. 因此，若我们证明了和或差中一种情况不成立，就足以证明该定理；而完成这个定理的证明需要一系列的推理.

(1) 我们可以认为 x 和 y 是互素的；因为若它们有公因子，则它们的立方和也能被这公因子的立方整除. 比如，设 $x=2a$，且 $y=2b$，则我们有 x^3+

$y^3 = 8a^3 + 8b^3$；现在如果这个式子是一个立方，那么 $a^3 + b^3$ 就也是一个立方.

(2) 既然 x 和 y 没有公因子，那么它们两个要么同为奇数，要么一奇一偶. 在第一种情况下，z 是偶数，在另一种情况是奇数. 所以，在 x,y,z 这三个数中，总是有一个是偶数，另两个是奇数. 所以，我们的证明只要考虑 x 和 y 都是奇数的情况就足够了. 这是因为我们既可以证明对于和的问题的不可能性，也可以证明对于差的问题的不可能性，而当一个根为负时，和的情况就变为差的情况.

(3) 若 x 和 y 是奇数，显然它们的和与它们的差都是偶数，故设 $\frac{1}{2}(x+y) = p$，及 $\frac{1}{2}(x-y) = q$，于是我们有 $x = p+q$ 及 $y = p-q$，所以我们得知 p 和 q 这两个数中一定有一个为偶数，而另一个为奇数. 我们现在把 $(p+q)^3 = x^3$ 和 $(p-q)^3 = y^3$ 相加，得到 $x^3 + y^3 = 2p^3 + 6pq^2 = 2p(p^2 + 3q^2)$，故只需要证明积 $2p(p^2 + 3q^2)$ 不可能是立方数. 又如果将此证明用于差的情况，则我们有 $x^3 - y^3 = 6p^2q + 2q^3 = 2q(q^2 + 3p^2)$，若把 p 和 q 互换就得到完全一样的表达式. 所以只要证明表达式 $2p(p^2 + 3q^2)$ 不可能为立方数就够了. 由此必有结论：和与差都不能是立方数.

(4) 若 $2p(p^2 + 3q^2)$ 是一个立方数，那么它应该是一个偶数，于是它可以被 8 除. 所以，此式的八分之一即 $\frac{1}{4}p(p^2 + 3q^2)$ 就一定是整数. 我们知道，p 和 q 一个是偶数，另一个是奇数，故 $p^2 + 3q^2$ 一定是一奇数，它不能被 4 整除，所以 4 整除 p，或者说 $\frac{p}{4}$ 一定是整数.

(5) 为了使 $\frac{1}{4}p(p^2 + 3q^2)$ 为立方数，它的每个因子，除非有公因子，就

一定分别都是立方数. 因为如果两个互素的因子的积是立方数，那么每个因子一定是立方数. 如果两个因子有公因子，则情况就不同了，需要特殊考虑. 故问题是要知道因子 p 和 p^2+3q^2 是否无公因子. 为了判断此事就一定要考虑到，如果这些因子有公因子，那么 p^2 和 p^2+3q^2 将有相同的公因子；它们的差，即 $3q^2$ 将有与 p^2 有相同的公因子. 因 p 与 q 互素，所以 p^2 与 $3q^2$ 除了 3 以外不会有别的公因子，这就是 p 可被 3 整除时的情况.

(6) 现在有两种情况要考察：一种是 p 和 p^2+3q^2 没有公因子，这总是发生在 p 不能被 3 整除时；另一种情况是当这些因子有公因子，即当 p 可被 3 整除时(因为此时这两个数都能被 3 整除). 我们必须仔细地区分这两种情况，因为每种情况都需要特别的证明.

第一种情况：设 p 不能被 3 除，则两个因子 $\frac{p}{4}$ 和 p^2+3q^2 互素，所以它们必须是立方数. 为了使 p^2+3q^2 为立方数，就象我们以前所见的，只需设 $p+q\sqrt{-3}=(t+u\sqrt{-3})^3$，及 $p-q\sqrt{-3}=(t-u\sqrt{-3})^3$，得 $p=t^3-9tu^2=t(t^2-9u^2)$，及 $q=3t^2u-3u^3=3u(t^2-u^2)$. 因 q 是奇数，故 u 一定也是奇数，所以 t 是偶数，否则 t^2-u^2 将是偶数.

在把 p^2+3q^2 化为立方数，且找到 $p=t(t^2-9u^2)=t(t+3u)(t-3u)$ 以后，还要求 $\frac{p}{4}$ 为一立方数，所以 $2p$ 也应是立方数，即要求式子 $2t(t+3u)(t-3u)$ 是一个立方. 但是必须注意到 t 是偶数，且不能被 3 整除，但我们已清楚地假设不是这种情形，所以三个因子 $2t, t+3u, t-3u$ 是互素的，而且每一个都各自为一立方数. 于是，我们若令 $t+3u=f^3$，及 $t-3u=q^3$，我们将有 $2t=f^3+q^3$. 所以，若 $2t$ 为立方数，我们将有两个立方数 f^3 和 q^3，它们的和为一立方数，并且它们显然要比最初假设的 x^3 和 y^3 小得多. 事实上，因我们开始已设 $x=p+q, y=p-q$，p, q 又是由字母 t, u 决定的，所以 x

和 y 一定比 t 和 u 大得多.

于是,如果较大的数中可以找到我们要求的这样两个立方数,则我们也会在小得多的数中找到两个立方数,它们的和为一立方数. 用同样的方法,我们总会得到更小的立方数. 现在已非常明确的是在较小的数当中没有这样的立方数. 这一结论也将在第二种情况中得到证实.

第二种情况:现在让我们假设 p 可被 3 整除,而 q 不能,并设 $p=3r$,表达式将变为$\frac{3}{4}r(9r^2+3q^2)$,或$\frac{9}{4}r(3r^2+q^2)$,这两个因子是互素的,这是因为 $3r^2+q^2$ 既不能被 2 也不能被 3 整除,而 r 一定也像q 一样是偶数,于是这两个因子一定都是立方数.

现在我们用前面的方法变换第二个因子 $3r^2+q^2$ 或 q^2+3r^2,得到 $q=t(t^2-9u^2)$,$r=3u(t^2-u^2)$. 必须注意的是,因q是奇数,故t必同样为奇数,因而 u 必定为偶数.

但$\frac{9}{4}r$ 一定也是立方数;或者乘以立方$\frac{8}{27}$,我们得知$\frac{2}{3}r$,即 $2u(t^2-u^2)=2u(t+u)(t-u)$ 为一立方数,且因这三个因子互素,故每个必定都是立方数. 于是设 $t+u=f^3$,$t-u=q^3$,我们有 $2u=f^3-q^3$. 也就是说,若 $2u$ 为立方数,则 f^3-q^3 一定为立方数. 所以我们将会有两个立方数 f^3 和q^3,它们比先前的其差为立方数的数小的多. 因为为了得到 $f^3=h^3+q^3$,即等于两个立方数之和的立方数,我们只须令 $f^3-q^3=h^3$. 这样,前面说的结论就被完全证明了,这是因为我们不能在较大的数中找到两个立方数,其和或差为立方数,而这又依据前面的考察过的结论"在较小的数中找不到这样的立方和"得来的.

欧拉给出证明之后,高斯给出了一个严格的证明. 欧拉虽然用的是递降法,但利用了 $x_1^3+x_2^3$ 可分解因式. $x_1^k+x_2^k+\cdots+x_{k-1}^k$ 是不可以分解因式

的，当 $k \geqslant 4$ 时，这是欧拉这个类比不成立的一个关键原因.

先讨论 $k=4$ 的情形. 为方便起见，方程改写为 $x_1^4+x_2^4+x_3^4=y^4$，

$x_1 \leqslant m, x_2 \leqslant m, x_3 \leqslant m, m \in \mathbf{N}$.

根据前面讨论过的排列组合有：

(1,1,1)

(2,1,1)　(2,1,2)　(2,2,2)

(3,1,1)　(3,1,2)　(3,2,2)　(3,3,1)　(3,3,2)　(3,3,3)

…

由 $U_{km}=\frac{1}{(k-1)!}m(m+1)\cdots(m+k-2)$，得 $U_{3m}=\frac{1}{2!}m(m+1)$.

由 $C_{3m}=\frac{1}{k!}m(m+1)\cdots(m+k-1)$，得 $C_{3m}=\frac{1}{3!}m(m+1)(m+2)$.

$$g(y_1)=y_1^4-1^4-1^4-1^4=0,$$

$$\begin{aligned} g(y_1+1) &= (y_1+1)^4-1^4-1^4-1^4 \\ &= (y_1+1)^4-y_1^4+y_1^4-1^4-1^4-1^4 \\ &= 4y_1^3+6y_1^2+4y_1+1. \end{aligned}$$

$$4y_1^3<4y_1^3+6y_1^2+4y_1+1<15y_1^3.$$

量子解满足以下关系：

$\frac{1}{4y_1^3}>\frac{1}{g(y_1+1)}>\frac{1}{15y_1^3}$，一般地有 $\frac{1}{4y_i^3}>\frac{1}{g(y_i+1)}>\frac{1}{15y_i^3}$，

$g(y_1)=y_1^4-1^4-1^4-1^4=0, 1<y_1<\sqrt[4]{3}\times 1$,

$g(y_2)=y_2^4-1^4-1^4-1^4=0, 2<y_2<\sqrt[4]{3}\times 2$,

$g(y_3)=y_3^4-2^4-2^4-1^4=0, 2<y_3<\sqrt[4]{3}\times 2$,

$g(y_4)=y_4^4-2^4-2^4-2^4=0, 2<y_4<\sqrt[4]{3}\times 2$,

$g(y_5)=y_5^4-3^4-1^4-1^4=0, 3<y_5<\sqrt[4]{3}\times 3$,

$g(y_6) = y_6^4 - 3^4 - 2^4 - 1^4 = 0, 3 < y_6 < \sqrt[4]{3} \times 3,$

$g(y_7) = y_7^4 - 3^4 - 2^4 - 2^4 = 0, 3 < y_7 < \sqrt[4]{3} \times 3,$

$g(y_8) = y_8^4 - 3^4 - 3^4 - 1^4 = 0, 3 < y_8 < \sqrt[4]{3} \times 3,$

$g(y_9) = y_9^4 - 3^4 - 3^4 - 2^4 = 0, 3 < y_3 < \sqrt[4]{3} \times 3,$

$g(y_1 0) = y_{10}^4 - 3^4 - 3^4 - 3^4 = 0, 3 < y_{10} < \sqrt[4]{3} \times 3,$

…

$$\sum_{i=1}^{C_{3m}} \frac{1}{|g(y_i+1)|} > \sum_{i=1}^{C_{3m}} \frac{1}{15y_i^3}$$

$$> \frac{1}{15\sqrt[4]{3^3}}[1 \times \frac{1}{1^3} + 3 \times \frac{1}{2^3} + 6 \times \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{m(m+1)}{2!} \times \frac{1}{m^3}]$$

$$= \frac{1}{15\sqrt[4]{3^3}} \times \frac{1}{2}[1 \times 2 \times \frac{1}{1^3} + 2 \times 3 \times \frac{1}{2^3} + 3 \times 4 \times \frac{1}{3^3} + \cdots + m \times (m+1) \times \frac{1}{m^3}]$$

$$= \frac{1}{30\sqrt[4]{3^3}}(2 + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{3^2} + \cdots + \frac{m+1}{m^2})$$

$$= \frac{1}{30\sqrt[4]{3^3}}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} + 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{m^2})$$

$$> \frac{1}{30\sqrt[4]{3^3}}\ln m.$$

$$\sum_{i=1}^{C_{3m}} \frac{1}{|g(y_i+1)|} < \sum_{i=1}^{C_{3m}} \frac{1}{4y_i^3}$$

$$< \frac{1}{4}[1 \times \frac{1}{1^3} + 3 \times \frac{1}{2^3} + 6 \times \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{m(m+1)}{2!} \times \frac{1}{m^3}]$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}[1 \times 2 \times \frac{1}{1^3} + 2 \times 3 \times \frac{1}{2^3} + 3 \times 4 \times \frac{1}{3^3} + \cdots + m \times (m+1) \times \frac{1}{m^3}]$$

$$=\frac{1}{8}[2+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{3^2}+\cdots+\frac{m+1}{m^2}]$$

$$=\frac{1}{8}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}+1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{m^2})$$

$$<\frac{1}{8}\ln m+\frac{3}{8}.$$

无穷级数 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{m^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}\leqslant \ln m+1,$$

$$1+\frac{\pi^2}{6}<3.$$

设 $x_1\leqslant m, x_2\leqslant m, x_3\leqslant m, m\in \mathbf{N}$ 时的量子解数为 $N(m)$，我们容易得到 $\lim\limits_{m\to+\infty} N(m)\to+\infty$.

可以更进一步证明量子解数的渐近公式为 $N(m)\sim\frac{a_4}{4\times 2!}\ln m$，其中系数 a_4 由下式确定：

$$a_4=\lim_{m\to+\infty}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{[1+(\frac{j}{m})^4+(\frac{i}{m})^4]^{\frac{3}{4}}}$$

或 $a_4=\int_0^1\int_0^1\frac{1}{(1+x_1^4+x_2^4)^{\frac{3}{4}}}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$.

a_4 满足下式 $1>a_4>\frac{1}{\sqrt[4]{3^3}}$. 这里主要讨论分布规律，量子解数公式的系数就不多讨论了.

根据推论 2 知，不定方程 $x_1^4+x_2^4+x_3^4=x_4^4$ 在 x_1, x_2, x_3 不超过足够大正整数 m 时的分布规律为 $N(m)\sim\frac{c_4}{4\times 2!}\ln m$.

下面讨论四个未知数的更一般的情形. $x_1^n+x_2^n+x_3^n=y^n, n\geqslant$

$5, n \in \mathbf{N}$.

$$g(y_1) = y_1^n - 1^n - 1^n, y_1 = \sqrt[n]{3} > 1,$$

$$g(y_2) = y_2^n - 2^n - 1^n - 1^n = 0, y_2 > 2,$$

$$g(y_3) = y_3^n - 2^n - 2^n - 1^n = 0, y_3 > 2,$$

$$g(y_4) = y_4^n - 2^n - 2^n - 2^n = 0, y_4 > 2,$$

$$g(y_5) = y_5^n - 3^n - 1^n - 1^n = 0, y_5 > 3,$$

$$g(y_6) = y_6^n - 3^n - 2^n - 1^n = 0, y_6 > 3,$$

$$g(y_7) = y_7^n - 3^n - 2^n - 2^n = 0, y_7 > 3,$$

$$g(y_8) = y_8^n - 3^n - 3^n - 1^n = 0, y_8 > 3,$$

$$g(y_9) = y_9^n - 3^n - 3^n - 2^n = 0, y_9 > 3,$$

$$g(y_{10}) = y_{10}^n - 3^n - 3^n - 3^n = 0, y_{10} > 3,$$

…

$$\begin{aligned} g(y_1 + 1) &= (y_1 + 1)^n - 1^n - 1^n - 1^n \\ &= (y_1 + 1)^n - y_1^n + y_1^n - 1^n - 1^n - 1^n \\ &= (y_1 + 1)^n - y_1^n. \end{aligned}$$

显然 $g(y_1 + 1) > n y_1^n$，量子解数为 $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{|g(y_i + 1)|}$.

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{|g(y_i + 1)|} < \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{n y_i^{n-1}}$$

$$< \frac{1}{n}\left[1 \times \frac{1}{1^{n-1}} + 3 \times \frac{1}{2^{n-1}} + 6 \times \frac{1}{3^{n-1}} + \cdots + \frac{m(m+1)}{2!} \times \frac{1}{m^{n-1}} + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{2n}\left(2 + \frac{2 \times 3}{2^{n-1}} + \frac{3 \times 4}{3^{n-1}} + \cdots + \frac{m(m+1)}{m^{n-1}} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{2n}\left(2 + \frac{3}{2^{n-2}} + \frac{4}{3^{n-2}} + \cdots + \frac{m+1}{m^{n-2}} + \cdots\right)$$

$$=\frac{1}{2n}(1+\frac{1}{2^{n-3}}+\frac{1}{3^{n-3}}+\cdots+\frac{1}{m^{n-3}}+\cdots+1+\frac{1}{2^{n-2}}+\frac{1}{3^{n-2}}+\cdots+\frac{1}{m^{n-2}}+\cdots)$$

$$<\frac{1}{2n}(\frac{\pi^2}{6}+\frac{\pi^2}{6})=\frac{\pi^2}{6n}.(n\geqslant 5)$$

$n=5$ 时，$x_1^n+x_2^n+x_3^n=y^n$ 的量子解数 $<\frac{\pi^2}{30}<0.34$. 不定方程没有正整数解是很自然的. 数学家利用计算机寻找解，发现 $y<10^5$ 没有正整数解. 下面对所有 $n\geqslant 5$，求不定方程 $x_1^n+x_2^n+x_3^n=y^n$ 的量子解数.

这里需要作出一个简单的变换.

$g(y_1)=y_1^n-1^n-1^n-1^n, y_1=\sqrt[n]{3}>1$,

$g(y_1+1)^n-1^n-1^n=(y_1+1)^n-3>2^n-3$.

记 $n=5$ 的量子解数为 S_5,

记 $n=6$ 的量子解数为 S_6,

…

记 $n=k$ 的量子解数为 S_k.

$$\sum_{j=5}^{k}S_j=S_5+S_6+\cdots+S_k.$$

$$S_5<\frac{1}{2^5-3}+\frac{1}{5}[\frac{3}{2^4}+\frac{6}{3^4}+\cdots+\frac{m(m+1)}{2!}\times\frac{1}{m^4}+\cdots],$$

$$S_6<\frac{1}{2^6-3}+\frac{1}{5}[\frac{3}{2^5}+\frac{6}{3^5}+\cdots+\frac{m(m+1)}{2!}\times\frac{1}{m^5}+\cdots],$$

…

$$S_k<\frac{1}{2^k-3}+\frac{1}{5}[\frac{3}{2^{k-1}}+\frac{6}{3^{k-1}}+\cdots+\frac{m(m+1)}{2!}\times\frac{1}{m^{k-1}}+\cdots].$$

注意到 $\frac{m(m+1)}{2!}\leqslant m^2$，$\frac{1}{2^k-3}=\frac{1}{2\times 2^{k-1}-3}<\frac{1}{2^{k-1}}$，$(k\geqslant 5)$. 改写以上式子：

$$S_5 < \frac{1}{2^4} + \frac{1}{5}(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{m^2} + \cdots),$$

$$S_6 < \frac{1}{2^5} + \frac{1}{5}(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{m^3} + \cdots),$$

…

$$S_k < \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{5}(\frac{1}{2^{k-3}} + \frac{1}{3^{k-3}} + \cdots + \frac{1}{m^{k-3}} + \cdots),$$

$$\lim_{m\to+\infty} \sum_{j=5}^{k} S_j < (\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}} + \cdots) + \frac{2}{5}(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{m^2} + \cdots)$$

$$= \frac{1}{2^4} \times 2 + \frac{2}{5}(1 - \frac{\pi^2}{6}) < 0.4.$$

$n \geqslant 5$ 时，不定方程 $x_1^n + x_2^n + x_3^n = y^n$ 的量子解数之和小于 0.4，不定方程 $x_1^n + x_2^n + x_3^n = y^n$ 没有一组解是很正常的.

对于不定方程 $x_1^n + x_2^n + x_3^n = y^n$，$n \geqslant 5$ 时，一定存在一正整数 M，$n \geqslant M$ 时，不定方程无解. 至于这个 M，可能是 5，也可能不是 5，但这并不很重要. 欧拉的想法是深刻的，从本质上而言也是正确的.

下面来讨论一般形式的欧拉猜想：$x_1^k + x_2^k + \cdots + x_{k-1}^k = y^k$.

$x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}$ 均 $\leqslant m, m \in \mathbf{N}$.

$y_1^k = 1^k + 1^k + \cdots + 1^k = k - 1, 1 < y_1 \leqslant \sqrt[k]{k-1} \times 1,$

$y_2^k = 2^k + 1^k + \cdots + 1^k, 2 < y_2 < \sqrt[k]{k-1} \times 2,$

…

根据前面的排列组合知识有：

$U_{km} = \frac{1}{(k-1)!} m(m+1)\cdots(m+k-2)$，得

$U_{(k-1)m} = \frac{1}{(k-2)!} m(m+1)\cdots(m+k-3).$

$m = 1, U_{(k-1)1} = 1.$

$m=2, U_{(k-1)2}=k-1.$

$m=3, U_{(k-1)3}=\frac{(k-1)k}{2!}.$

$m=4, U_{(k-1)4}=\frac{(k-1)k(k+1)}{3!}.$

…

$C_{km}=\frac{1}{k!}m(m+1)\cdots(m+k-1)$,得

$C_{(k-1)m}=\frac{1}{(k-1)!}m(m+1)\cdots(m+k-2).$

量子解数为 $\sum_{i=1}^{C_{(k-1)m}}\frac{1}{|g(y_i+1)|}$,即 $x_1,x_2,\cdots,x_{k-1}$ 均 $\leqslant m, m\in\mathbf{N}$ 时的量子解数.

$$
\begin{aligned}
g(y_i+1)&=(y_i+1)^k-y_i^k\\
&=C_k^1y_i^{k-1}+C_k^2y_i^{k-2}+C_k^3y_i^{k-3}+\cdots+C_k^{k-1}+C_k^k\\
&<(C_k^1+C_k^2+C_k^3+\cdots+C_k^{k-1}+C_k^k)y_i^{k-1}\\
&<2^ky_i^{k-1}.
\end{aligned}
$$

显然 $g(y_i+1)=(y_i+1)^k-y_i^k>C_k^1y_i^{k-1}=ky_i^{k-1}.$

$$\sum_{i=1}^{C_{(k-1)m}}\frac{1}{|g(y_i+1)|}<\sum_{i=1}^{C_{(k-1)}}\frac{1}{ky_i^{k-1}}$$

$$<\frac{1}{k}[1+(k-1)\times\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{(k-1)k}{2!}\times\frac{1}{3^{k-1}}+\cdots+\frac{m(m+1)\cdots(m+k-3)}{(k-2)!}\times\frac{1}{m^{k-1}}]$$

$$=\frac{1}{k(k-2)!}[1\times2\times\cdots\times(k-2)+2\times3\times\cdots\times(k-1)\times\frac{1}{2^{k-1}}+3\times4\times\cdots\times k\times\frac{1}{3^{k-1}}+\cdots+m(m+1)\cdots(m+k-3)\times\frac{1}{m^{k-1}}]\sim\frac{1}{k(k-2)!}\ln m.$$

$$\sum_{i=1}^{C_{(k-1)m}} \frac{1}{|g(y_i+1)|} > \sum_{i=1}^{C_{(k-1)m}} \frac{1}{2^k y_i^{k-1}}$$

$$> \frac{1}{2k\sqrt[k]{k-1}}[1+(k-1)\times\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{(k-1)k}{2!}\times\frac{1}{3^{k-1}}+\cdots+$$

$$\frac{m(m+1)\cdots(m+k-3)}{(k-2)!}\times\frac{1}{m^{k-1}}]$$

$$=\frac{1}{2^k(k-2)!\sqrt[k]{(k-1)^{k-1}}}[1\times2\times\cdots\times(k-2)+2\times3\times\cdots\times(k-1)$$

$$\times\frac{1}{2^{k-1}}+3\times4\times\cdots\times k\times\frac{1}{3^{k-1}}+\cdots+m(m+1)\cdots(m+k-3)\times\frac{1}{m^{k-1}}]$$

$$>\frac{1}{2^k\sqrt[k]{(k-1)^{k-1}}(k-2)!}\ln m.$$

可以证明 $x_1^k+x_2^k+\cdots+x_{k-1}^k=y^k,k\geqslant4$ 的量子解数为 $N(m)\sim\frac{a_k}{k(k-2)!}\ln m$，其中 a_k 的确定类似 a_4，只不过求 $k-2$ 重积分而已. 由推论 2 知方程的解数为：

$$N(m)\sim\frac{c_k}{k(k-2)!}\ln m.$$

对于不定方程 $x_1^n+x_2^n+\cdots+x_{k-1}^n=x_k^n,n>k$ 时方程只有有限组解. 一定存在一正整数 $M,n\geqslant M$ 时，不定方程 $x_1^n+x_2^n+\cdots+x_{k-1}^n=x_k^n$ 没有解. 读者可以仿照 $k=4$ 的一般情形得到这一结论.

下面来讨论欧拉的另一个猜想.

$x_1^k+x_2^k+\cdots+x_k^k=y_k^k,k\geqslant4$，欧拉认为方程一定有解，$n=2$ 时，不定方程有参数解，$n=3$，有 $3^3+4^3+5^3=6^3$. $n=4$，直到 1911 年，才由数学家诺里找到第一组解. 下面来讨论这一问题.

$y_1^k=1^k+1^k+\cdots+1^k=k,1<y_1\leqslant\sqrt[k]{k}\times1,$

$y_2^k=2^k+1^k+\cdots+1^k,2<y_2<\sqrt[k]{k}\times2,$

$$U_{km}=\frac{1}{(k-1)!}m(m+1)\cdots(m+k-2),$$

$$C_{km}=\frac{1}{k!}m(m+1)\cdots(m+k-2),$$

$$m=1,U_{k1}=1,$$

$$m=2,U_{k2}=k,$$

$$m=3,U_{k3}=\frac{k(k+1)}{2!},$$

$$m=4,U_{k4}=\frac{k(k+1)(k+2)}{3!},$$

$\cdots$

量子解数为$\sum_{i=1}^{C_{km}}\frac{1}{|g(y_i+1)|}$，即 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 均$\leqslant m,m\in\mathbf{N}$时的量子解数.

$$\begin{aligned}g(y_i+1)&=(y_i+1)^k-y_i^k\\&=C_k^1y_i^{k-1}+C_k^2y_i^{k-2}+C_k^3y_i^{k-3}+\cdots+C_k^{k-1}y_i+C_k^k\\&<(C_k^1+C_k^2+C_k^3+\cdots+C_k^{k-1}+C_k^k)y_i^{k-1}\\&<2^ky_i^{k-1}.\end{aligned}$$

显然 $g(y_i+1)=(y_i+1)^k-y_i^k>C_k^1y_i^{k-1}=ky_i^{k-1}$.

$$\sum_{i=1}^{C_{km}}\frac{1}{|g(y_i+1)|}<\sum_{i=1}^{C_{km}}\frac{1}{ky_i^{k-1}}$$

$$<\frac{1}{k}[1+k\times\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{k(k+1)}{2!}\times\frac{1}{3^{k-1}}+\cdots+\frac{m(m+1)\cdots(m+k-2)}{(k-1)!}\times\frac{1}{m^{k-1}}]$$

$$=\frac{1}{k(k-1)!}[1\times2\times\cdots\times(k-1)+2\times3\times\cdots\times k\times\frac{1}{2^{k-1}}+3\times4\times\cdots\times k\times(k+1)\times\frac{1}{3^{k-1}}+\cdots+m(m+1)\cdots(m+k-2)\times\frac{1}{m^{k-1}}]\sim\frac{1}{k!}m.$$

$$\sum_{i=1}^{C_{km}} \frac{1}{|g(y_i+1)|} > \sum_{i=1}^{C_{km}} \frac{1}{2^k y_i^{k-1}}$$

$$> \frac{1}{2^k \sqrt[k]{k^{k-1}}}[1 + k \times \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{k(k+1)}{2!} \times \frac{1}{3^{k-1}} + \cdots +$$

$$\frac{m(m+1)\cdots(m+k-2)}{(k-1)!} \times \frac{1}{m^{k-1}}]$$

$$= \frac{1}{2^k \sqrt[k]{k^{k-1}}(k-1)!}[1 \times 2 \times \cdots \times (k-1) + 2 \times 3 \cdots \times k \times \frac{1}{2^{k-1}} + 3 \times$$

$$4 \times \cdots \times k \times (k+1) \times \frac{1}{3^{k-1}} + \cdots + m(m+1)\cdots(m+k-2) \times \frac{1}{m^{k-1}}]$$

$$> \frac{1}{2^k \sqrt[k]{k^{k-1}}(k-1)!} m.$$

可以证明量子解数的渐近公式为$N(m) \sim \frac{b_k}{k!}m$，$b_k$的计算类似于$a_k$. 由推论 2 知 $x_1^k + x_2^k + \cdots + x_k^k = y_k^k$ 的解数的分布规律为:

$$N(m) \sim \frac{c'_k}{k!}m.$$

$k=2$时，在第三章已经证明了它的分布规律，用新的数学理论导出的分布规律与现有的数学理论得到的结果一致.

对于不定方程 $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 = x_5^5$，直到 1965 年，兰德(Lander) 和帕金(Parkin) 找到了一组解. 离欧拉作出猜想已是一百多年了.

$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$.

对于 $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = x_4^4$，1988 年，哈佛大学艾尔斯基(Elkies) 利用椭圆曲线理论证明了方程有无限组解.

$2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 = 20615673^4$.

对于不定方程 $x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 + x_4^6 + x_5^6 = x_6^6$，为什么还没有找到它的解，在第九章将会作出回答.

第八章　不定方程的有理数解

我们已经讨论了不定方程的整数解，在这一章里我们将探讨不定方程的有理数解，了解不定方程的整数解与有理数解的深刻联系和区别. 一个不定方程是有无限组有理数解还是有有限组有理数解?我们可以这样直接地提出问题. 是什么深刻地决定着或支配着不定方程有理数解的有限或无限呢?

一、不定方程的有理数解

一个不定方程的有理数解，分为三种情况:

(1) 所有未知数的解都是整数.

(2) 所有未知数的解一部分是整数，一部分是分数.

(3) 所有未知数的解都是分数.

例如 $8x^2+y^2=2z^2+1$,

所有未知数的解都是整数: $x=1, y=1, z=2$.

所有未知数的解一部分是整数，一部分是分数: $x=\frac{1}{2}, y=7, z=5$.

所有未知数的解都是分数: $x=\frac{2}{5}, y=\frac{1}{5}, z=\frac{2}{5}$.

1. 不定方程 $x^2 = 2y^2 - 1$ 的有理数解

我们在第二章讨论了不定方程 $x^2 = 2y^2 - 1$，找到了它的整数的参数解及分布规律，下面来讨论它的有理数解. y 为整数，x 显然不能为分数，x 为整数，y 显然也不能为分数. 所以 x，y 只能同时为分数.

设 $x = \frac{e}{f}$，$y = \frac{g}{h}$. $f^2 \times (\frac{e}{f})^2 = f^2 \times (\frac{g}{h})^2 - f^2 \times 1$，只有 f^2 整除 h^2 才能成立，同样地，$h^2 \times (\frac{e}{f})^2 = h^2 \times (\frac{g}{h})^2 - h^2 \times 1$，只有 h^2 整除 f^2 才能成立，我们知道 f 和 h 相等. 不失一般性，设 $x = \frac{e}{f}$，$y = \frac{g}{f}$. $(\frac{e}{f})^2 = 2(\frac{g}{f})^2 - 1$，方程可化为 $e^2 + f^2 = 2g^2$.

我们在第三章已经找到了不定方程 $x_1^2 + x_2^2 = 2x_3^2$ 的非平凡正整数解的参数解 $x_3 = a^2 + b^2$，$x_2 = a^2 + 2ab - b^2$，$x_1 = | b^2 + 2ab - a^2 |$，$(a,b) = 1$，$a > b$，$a$，$b$ 一奇一偶.

这样我们有不定方程 $x^2 = 2y^2 - 1$ 的有理数解：

$$x = \pm \frac{b^2 + 2ab - a^2}{a^2 + 2ab - b^2}, y = \pm \frac{a^2 + b^2}{a^2 + 2ab - b^2};$$

$$x = \pm \frac{a^2 + 2ab - b^2}{b^2 + 2ab - a^2}, y = \pm \frac{a^2 + b^2}{b^2 + 2ab - a^2}.$$

分数的参数解中的 a 和 b，满足 $(a,b) = 1$，$a > b$，a，b 一奇一偶. $a \in \mathbf{N}$，$b \in \mathbf{N}$，$b^2 + 2ab - a^2 \neq 1$.

$a = 2$，$b = 1$，$x = \pm \frac{1}{7}$，$y = \pm \frac{5}{7}$.

$a = 3$，$b = 2$，$x = \pm \frac{7}{17}$，$y = \pm \frac{13}{17}$，$x = \pm \frac{17}{7}$，$y = \pm \frac{13}{7}$.

2. 不定方程 $x^4+y^4=z^4+1$ 的有理数解($x\neq\pm z, y\neq\pm z$)

根据前面的理论,$x^4+y^4=z^4+1, x\neq\pm z, y\neq\pm z$ 只有有限组正整数解,它是不是只有有限组有理数解呢?由于 $a^4+b^4=w^4+v^4$ 有无限组非平凡正整数解,我们有 $x=\frac{a}{v}, y=\frac{b}{v}, z=\frac{w}{v}$. 显然有无数组有理数解. 下面是它的一组有理数解:

$$x=\frac{133}{158}, y=\frac{134}{158}, z=\frac{59}{158}.$$

3. 不定方程 $x^5+y^5=z^5+1$ 的有理数解($x\neq\pm z, y\neq\pm z$)

根据前面的结果,$x^5+y^5=z^5+1, x\neq\pm z, y\neq\pm z$ 只有有限组正整数解,它是有无限组有理数解,还是有限组有理数解呢?

设 $x=\frac{a}{b}, y=\frac{c}{d}, z=\frac{e}{f}$,整理得 $(bce)^5+(dae)^5=(fac)^5+(ace)^5$,这个不定方程只有有限组非平凡整整数解,所以 $x^5+y^5=z^5+1, x\neq\pm z, y\neq\pm z$ 只有有限组有理数解.

4. 不定方程 $x^2+y^2=z^2+1$ 的有理数解($x\neq\pm z, y\neq\pm z$)

我们在第三章已经讨论了不定方程 $x^2+y^2=z^2+1$ 的整数解.

不定方程 $x^2+y^2=w^2+v^2$ 的参数解:

$x=|c^2+b^2-a^2-2bc+2ab|, y=|c^2+a^2-b^2-2ac+2ab|$.

$w=|-(a^2+b^2+c^2)+2(a+b)c|, v=|c^2-(a^2+b^2)|$.

由于 $(c^2+b^2-a^2-2bc+2ab)^2+(c^2+a^2-b^2-2ac+2ab)^2$

$=(2ac+2bc-a^2-b^2-c^2)^2+(c^2-a^2-b^2)^2$,

不定方程 $x^2+y^2=z^2+1$ 的部分有理数解为:

$$x=\pm\frac{|c^2+b^2-a^2-2bc+2ab|}{|-(a^2+b^2+c^2)+2(a+b)c|},$$

$$y=\pm\frac{|c^2+a^2-b^2-2ac+2ab|}{|-(a^2+b^2+c^2)+2(a+b)c|},$$

$$z=\pm\frac{|c^2-(a^2+b^2)|}{|-(a^2+b^2+c^2)+2(a+b)c|}.$$

$x^2+y^2=z^2+1$，取 $a=1,b=2,c=4$ 得 $(\frac{7}{4})^2+(\frac{9}{3})^2=(\frac{11}{3})^2=1$. 不定方程 $x^2+y^2=z^2+1$ 有无限组有理数解，而且可以求出它的参数解.

二、不定方程的有理数的解数及解数分布规律

由于不定方程的有理数的求解可以转化为求不定方程的整数解，所以不定方程的整数解的解数可以用来定义不定方程的有理数的解数. 由于不定方程的整数解无限时存在分布规律，同样地，有理数的解数也存在分布规律.

第九章　计算机在不定方程中的作用及其局限性

如果不定方程没有参数解，我们求它的解需要借助计算机. 在计算机发明之后，我们明白人类的计算能力远非计算机的对手. 计算机是解方程的最有力的工具. 我们也将看到，计算机在解不定方程时，它的计算能力也非常有限.

一、计算机在不定方程求解中的作用

$x_1^4+x_2^4+x_3^4=x_4^4$，

$95800^4+217519^4+414560^4=422481^4$.

计算机花了一百多个小时找到了这样一组解，如果用人工的方法找到这样一组解，一百年的时间都不够. 由此可见计算机在解不定方程的作用是非常大的.

二、计算机在不定方程求解中的局限性

$x_1^6+x_2^6+x_3^6+x_4^6+x_5^6=x_6^6$，根据前面的结果有 $N(m)\sim\frac{c_6}{6\times4!}\ln m$.

取 $c_6 = 2$ 作近似计算，$N(m) \sim \frac{1}{72}\ln m$. 取 $N(m) = 1.1 \approx \frac{1}{72}\ln m$. $m \approx e^{72} \approx 1.8 \times 10^{31}$. 从 1 到 1.8×10^{31} 一数中任取五个数的组合约为 1.57×10^{164}. 假设计算机运算速度为每秒一千万亿次，完成上述组合需时 1.57×10^{140} 秒，约 4.98×10^{141} 年.

根据物理学和天文学最新的研究结果，我们的宇宙诞生至今也不过约 137 亿年而已.

$x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 + x_4^6 + x_5^6 = x_6^6$，如果方程得第一组解 x_6 接近 1.8×10^{31} 或超过它，那么，计算机搜寻到解是不可能的.

新的数学理论表明 $x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 + x_4^6 + x_5^6 = x_6^6$ 与 $x^2 = 2y^2 - 1$ 有相似的分布规律，只是系数不同而已. $x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 + x_4^6 + x_5^6 = x_6^6$ 和 $x^2 = 2y^2 - 1$ 的分布规律分别为 $N(m) \sim \frac{c_6}{6 \times 4!}\ln m$，$N(m) \sim \frac{1}{\ln(3 + 2\sqrt{2})}\ln m$. 但系数的大小，对于计算机找到解有着决定性的影响.

三、计算机对数学问题的一个检验

$x^2 = 2y^2 - 1$ 有无数个解，对任何实数 θ，$0 < \theta \leqslant 2$，不定方程 $[x^\theta] = 2[y^\theta] - 1$ 都有无限组解?$0 < \theta \leqslant 1$ 容易证明方程有无限组正整数解.

$\theta = 1.5$，$[x^{1.5}] = 2[y^{1.5}] - 1$. 方程的前几组解为：$x_1 = 1, y_1 = 1$；$x_2 = 9, y_2 = 6$；$x_3 = 22, y_3 = 14$；$x_4 = 46, y_4 = 29$；$x_5 = 84, y_5 = 53$.

计算机可以找出一系列的解，为数学理论提供直观的感知.

$\theta = 2.5$，$[x^{2.5}] = 2[y^{2.5}] - 1$，$x_1 = 1, y_1 = 1$ 为方程的第一组解. 计算机可以去找它的解，会不会找到第二组解呢?

方程 $[x^{1.1}] = 2y^5 - 1$ 的部分 xy 整数解：

x 为 1,6457,13032,23912,40844,10756747,22272343,32046122,55450194,67866238,90442610,99141289.

相应的 y 为 1,6,7,8,9,14,36,39,44,46,49,50.

两个未知数的方程,对于计算机而言,是最方便搜寻解,以及验证一些分布规律.

$[x^\theta]+[y^\theta]=[z^\theta]$,$\theta$ 为实数,$\theta>3$,对任一确定的 θ,方程只有有限组正整数解?

$[x^\theta]+[y^\theta]=[z^\theta]$,$\theta<3$,$\theta$ 为实数,对任一确定的 θ,方程有无限组正整数解?

$[x^{\frac{5}{2}}]+[y^{\frac{5}{2}}]=[z^{\frac{5}{2}}]$,最小的正整数解是 $[11^{\frac{5}{2}}]+[29^{\frac{5}{2}}]=[30^{\frac{5}{2}}]$.

第十章　一个不等式与高斯圆内整点问题

高斯就圆内整数点给出了一个定理：设半径为r的圆内整点数为$S(r)$，$S(r)=\pi r^2+O(r^{1+\epsilon})$. 对于误差项，数学界猜测：

$$S(r)=\pi r^2+O(r^{\theta+\epsilon}),\theta=\frac{1}{2}.$$

许多数学家对这个问题进行了研究，一百多年过去了，取得了一定的进展. 1906年，夕尔宾斯基(Sierpinski)证明了$\theta=\frac{2}{3}$. 现在最好的结果为莫卓溪(Mozzochi)等得到的$\theta=\frac{131}{208}$. 由$\theta=\frac{2}{3}\approx 0.667$到$\theta=\frac{131}{208}\approx 0.630$，离$\theta=\frac{1}{2}=0.5$，问题的解决还有一定的距离. 我们在这一章里，对高斯问题进行巧妙的变换，将圆内整点数分为两部分的求和，其中一部分的和满足猜想，已给出严格的证明. 对于另外一部分的求和，我们证明了只要它满足泊松分布，猜想成立. 需要明确地指出，这里并没有证明它一定满足泊松分布. 我们将这个求和的问题与成千上万个类似的求和问题联系在一起了. 换句话说，找到了高斯问题的一个等价命题，而与等价命题类似的问题数不胜数.

一、圆内整点问题

若 $L_m=\sqrt{m^2-0^2}+\sqrt{m^2-1}+\sqrt{m^2-2^2}+\cdots+\sqrt{m^2-([m]-1)^2}+\sqrt{m^2-[m]^2}$，有 $L_m=\frac{\pi}{4}m^2+\frac{m}{2}+O(m^{\frac{1}{2}+\epsilon})$.

证明了 $L_m=\frac{\pi}{4}m^2+\frac{m}{2}+O(m^{\frac{1}{2}+\epsilon})$. (A)

$K_m=(\sqrt{m^2-0^2}-[\sqrt{m^2-0^2}])+(\sqrt{m^2-1^2}-[\sqrt{m^2-1^2}])+(\sqrt{m^2-2^2}-[\sqrt{m^2-2^2}])+\cdots+(\sqrt{m^2-([m]-1)^2}-[\sqrt{m^2-([m]-1)^2}])+(\sqrt{m^2-[m]^2}-[\sqrt{m^2-[m]^2}])$.

猜测 $K_m=\frac{m}{2}+O(m^{\frac{1}{2}+\epsilon})$. (B)

半径为 m 的圆内整点数为 $\pi(m)$，证明了 $\pi(m)=4(L_m-K_m)+1$.

先证明与(B)有关的三个结论.

结论 Ⅰ：$U_m=(\frac{m}{1!}+\frac{m^2}{2!}+\frac{m^3}{3!}+\cdots+\frac{m^k}{k!})e^{-m}$，其中 $k=m-[m^{\frac{1}{2}+\epsilon}]$，$\epsilon$ 为任意小的正数，$m>0$，$\lim\limits_{m\to+\infty}U_m=0$.

结论 Ⅱ：$V_m=(\frac{m^k}{k!}+\frac{m^{k+1}}{(k+1)!}+\frac{m^{k+2}}{(k+2)!}+\cdots)e^{-m}$，其中 $k=m-[m^{\frac{1}{2}+\epsilon}]$，$\epsilon$ 为任意小的正数，$m>0$，$\lim\limits_{m\to+\infty}V_m=0$.

结论 Ⅲ：$S_m=(\frac{m^{m-k}}{(m-k)!}+\frac{m^{m-k+1}}{(m-k+1)!})+\cdots+\frac{m^k}{k!}+\cdots+\frac{m^{m+k-1}}{(m+k-1)!}+\frac{m^{m+k}}{(m+k)!}$，$e^{-m}$，$k=[m^{\frac{1}{2}+\epsilon}]$，$\epsilon$ 为任意小的正数，$\lim\limits_{m\to+\infty}S_m=1$.

证明：(一) 先证明结论 Ⅰ.

$$U_m=(\frac{m}{1!}+\frac{m^2}{2!}+\frac{m^3}{3!}+\cdots+\frac{m^k}{k!})e^{-m}$$

$$=\frac{k(k-1)\times\cdots\times 2}{m^{k-1}}+\frac{k(k-1)\times\cdots\times 3}{m^{k-2}}+\frac{k(k-1)\times\cdots\times 4}{m^{k-3}}+\cdots+$$

$$\frac{k(k-1)}{m^2}+\frac{k}{m}+1)\frac{m^k}{k!}e^{-m}$$

$$<\left((\frac{k}{m})^{k-1}+(\frac{k}{m})^{k-2}+(\frac{k}{m})^{k-3}+\cdots+(\frac{k}{m})^2+(\frac{k}{m})+1)\right)\frac{m^k}{k!}e^{-m}$$

$$=\frac{1-(\frac{k}{m})^k}{1-\frac{k}{m}}\times\frac{m^k}{k!}e^{-m}$$

$$<\frac{1}{1-\frac{k}{m}}\times\frac{m^k}{k!}e^{-m}$$

$$=\frac{m}{m-k}\times\frac{m^k}{k!}e^{-m}$$

$$=\frac{m}{m-k}\times m^{m-[m^{\frac{1}{2}+\epsilon}]}\div(m-[m^{\frac{1}{2}+\epsilon}])!\times e^{-m}$$

$$=\frac{m}{m-k}\times m\times(m-1)\times(m-2)\cdots(m-[m^{\frac{1}{2}+\epsilon}]+1)\div m^{[m^{\frac{1}{2}+\epsilon}]}$$

$$\times\frac{m^m}{m!}e^{-m}$$

$$<\frac{m}{m-k}\times\frac{m^m}{m!}e^{-m}=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2\pi}(m-k)}\times\sqrt{2\pi m}\times\frac{m^m}{m!}e^{-m}.$$

由斯特林(Stirling)公式：$m!\sim(\frac{m}{e})\sqrt[m]{2\pi m}$，$\lim\limits_{m\to+\infty}\frac{m^m}{m!}e^{-m}\cdot\sqrt{2\pi m}=1$.

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2\pi}(m-k)}=\lim_{m\to+\infty}\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2\pi}[m^{\frac{1}{2}+\epsilon}]}=0.$$

故 $\lim\limits_{m\to+\infty}U_m=0$.

（二）证明结论 Ⅱ.

$$V_m=(\frac{m^k}{k!}+\frac{m^{k+1}}{(k+1)!}+\frac{m^{k+2}}{(k+2)!}+\cdots)e^{-m}$$

$$=\frac{m^k}{k!}(1+\frac{m}{k+1}+\frac{m^2}{(k+1)(k+2)}+\cdots)e^{-m}$$

$$<\frac{m^k}{k!}(1+\frac{m}{k+1}+\frac{m^2}{(k+1)^2}+\cdots)e^{-m}$$

$$<\frac{m^k}{k!}e^{-m}\times\frac{1}{1-\frac{m}{k+1}}$$

$$=\frac{k+1}{k+1-m}\times\frac{m^k}{k!}e^{-m}.$$

$$=m^{m+[m^{\frac{1}{2}+\epsilon}]}\div(m+[m^{\frac{1}{2}+\epsilon}])!\times e^{-m}\times\frac{k+1}{k+1-m}$$

$$=m^{[m^{\frac{1}{2}+\epsilon}]}\div[(m+1)(m+2)\cdots(m+[m^{\frac{1}{2}+\epsilon}])]\times\frac{k+1}{k+1-m}$$

$$\times\frac{m^m}{m!}e^{-m}$$

$$<\frac{m^m}{m!}e^{-m}\times\frac{k+1}{k+1-m}$$

$$=\frac{m^m}{m!}\times\sqrt{2\pi m}\times e^{-m}\times\frac{k+1}{\sqrt{2\pi m}(k+1-m)}.$$

$$\lim\frac{m^m}{m!}\times\sqrt{2\pi m}\times e^{-m}=1,$$

$$-\frac{k+1}{\sqrt{2\pi m}(k+1-m)}<\frac{2m+1}{\sqrt{2\pi m}m^{\frac{1}{2}+\epsilon}}=\frac{2m+1}{\sqrt{2\pi}m^{\frac{1}{2}+\epsilon}}.$$

显然 $\lim\limits_{m\to+\infty}\dfrac{2m+1}{\sqrt{2\pi}m^{1+\epsilon}}=0$，

故 $\lim\limits_{m\to+\infty}V_m=0$.

（三）证明结论 Ⅲ.

由于 $\lim\limits_{m\to+\infty}U_m=0$，$\lim\limits_{m\to+\infty}V_m=0$，$\lim\limits_{m\to+\infty}S_m=1$.

对于 K_m 的估值，数学家证明了 $K_m \sim \frac{m}{2}$. $K_m = \frac{m}{2} + R(m)$. 对 R_m 的估值，猜测 $R(m) = O(m^{\frac{1}{2}+\epsilon})$，并对此作了大量的研究. 如果 K_m 的期望值分布满足泊松(Poisson)分布，那么就得到结论(B).

与(B)类似的问题有：

问题 1：$K_m = \sqrt{1} - [\sqrt{1}] + \sqrt{2} - [\sqrt{2}] + \sqrt{3} - [\sqrt{3}] + \cdots + \sqrt{m} - [\sqrt{m}]$，

$K_m = \frac{m}{2} + O(m^{\frac{1}{2}+\epsilon})$？ $m \in \mathbf{N}$.

问题 2：$K_m = \sqrt{2} - [\sqrt{2}] + \sqrt{4} - [\sqrt{4}] + \sqrt{6} - [\sqrt{6}] + \cdots + \sqrt{2m} - [\sqrt{2m}]$，

$K_m = \frac{m}{2} + O(m^{\frac{1}{2}+\epsilon})$？ $m \in \mathbf{N}$.

问题 3：$K_m = \sqrt{m^3 - 1^3} - [\sqrt{m^3 - 1^3}] + \sqrt{m^3 - 2^3} - [\sqrt{m^3 - 2^3}] + \cdots + \sqrt{m^3 - [m]^3} - [\sqrt{m^3 - [m]^3}]$，

$K_m = \frac{m}{2} + O(m^{\frac{1}{2}+\epsilon})$？ $m > 0$.

问题 4：在闭区间[0,1]随机取 m 个数，则 m 个数的和为 K_m.

$K_m = \frac{m}{2} + O(m^{\frac{1}{2}+\epsilon})$？ $m \in \mathbf{N}$.

问题 5：在闭区间[−1,0]随机取 m 个数，则 m 个数的和为 K_m.

$K_m = -\frac{m}{2} + O(m^{\frac{1}{2}+\epsilon})$？ $m \in \mathbf{N}$.

问题 6：在闭区间[−1,1]随机取 m 个数，则 m 个数的和为 K_m.

$K_m = 0 + O(m^{\frac{1}{2}+\epsilon})$？ $m \in \mathbf{N}$.

问题 7：投掷硬币试验，当试验次数为 m 时，出现正面的次数为 K_m.

$K_m = \frac{m}{2} + O(m^{\frac{1}{2}+\epsilon})$？ $m \in \mathbf{N}$.

这样的问题可以无穷无尽，类似这样的问题需要联系起来一起研究.

投掷硬币试验，当试验次数为 m 时，出现正面的次数为 K_m，$K_m \sim \frac{m}{2}$，

$\lim\limits_{m\to+\infty}\frac{K_m}{m}=\frac{1}{2}$. 记 $K_m=\frac{m}{2}+R(m)$，$R(m)=O(m^{\frac{1}{2}+\epsilon})$？可以证明 $R(m)=O(m^{\frac{1}{2}+\epsilon})$，这已经成为了数学定理，这里只加以引用.

下面我们来证明问题 1 的结论成立.

(1) $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}<\frac{2}{3}n\sqrt{n}+\frac{2}{3}\sqrt{n}$.

用数学归纳法.

$n=1$，左边为 1，右边为 $\frac{4}{3}$，结论成立.

设 $n=k$ 时结论成立，$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{k}<\frac{2}{3}k\sqrt{k}+\frac{2}{3}\sqrt{k}$.

当 $n=k+1$ 时，

$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{k}+\sqrt{k+1}<\frac{2}{3}k\sqrt{k}+\frac{2}{3}\sqrt{k}+\sqrt{k+1}$，

由 $1<\frac{2\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$，得 $\frac{1}{3}<\frac{2}{3}\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$.

由 $\frac{1}{3}<\frac{2}{3}\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$，得 $\frac{1}{3}\sqrt{k+1}<\frac{2}{3}(k+1)(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$，由 $\frac{1}{3}\sqrt{k+1}<\frac{2}{3}(k+1)(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$ 变换得到 $\frac{2}{3}(k+1)\sqrt{k}+\sqrt{k+1}<\frac{2}{3}(k+1)\sqrt{k+1}+\frac{2}{3}\sqrt{k+1}$.

当 $n=k+1$ 时，结论成立.

(2) $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}>\frac{2}{3}n\sqrt{n}-\frac{2}{3}\sqrt{n}$.

用数学归纳法.

$n=1$，左边为 1，右边为 $\frac{1}{3}$，结论成立.

设 $n=k$ 时结论成立，$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{k}>\frac{2}{3}k\sqrt{k}-\frac{2}{3}\sqrt{k}$.

当 $n=k+1$ 时，$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{k}+\sqrt{k+1}>\frac{2}{3}k\sqrt{k}-\frac{2}{3}\sqrt{k}+\sqrt{k+1}$.

由于 $k+1+\sqrt{k(k+1)}>2k-2$，所以$\frac{1}{3}\sqrt{k+1}>\frac{2k-2}{3(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}$.

由$\frac{1}{3}\sqrt{k+1}>\frac{2(k+1)-4}{3(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}$，

得到$\frac{1}{3}\sqrt{k+1}>\frac{2(k+1)}{3(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}-\frac{4}{3(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}$.

将上式改写为$\frac{5}{3}\sqrt{k+1}-\frac{4}{3}\sqrt{k}>\frac{2(k+1)}{3(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}$.

进一步得到$\frac{5}{3}\sqrt{k+1}-\frac{4}{3}\sqrt{k}>\frac{2}{3}(k+1)(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$.

将上式变换为$\frac{2}{3}k\sqrt{k}-\frac{2}{3}\sqrt{k}+\sqrt{k+1}>\frac{2}{3}(k+1)\sqrt{k+1}-\frac{2}{3}\sqrt{k+1}$.

当 $n=k+1$ 时，结论成立.

(3)$[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+\cdots+[\sqrt{m-k-1}]+[\sqrt{m-k}]+\cdots+[\sqrt{m}]$

$=\frac{2}{3}[\sqrt{m}]^3-\frac{[\sqrt{m}]^2}{2}-\frac{[\sqrt{m}]^2}{6}+(m-[\sqrt{m}]+1)[\sqrt{m}]$.

下面来证明这个结论.

取一个最小的自然数 k，使 $\sqrt{m-k}$ 为一个正整数，$m-k=n^2$，如果 m 是一个平方数，显然 $k=0$. 由于 k 是一个最小的自然数，我们可以得到 $n=[\sqrt{m}]$. 如 $\sqrt{15-6}=3^2$，$3=[\sqrt{15}]$，$\sqrt{14-5}=3^2$，$3=[\sqrt{14}]$.

$[\sqrt{1}]=1$，$[\sqrt{2}]=1$，$[\sqrt{3}]=1$.

$[\sqrt{4}]=2$，$[\sqrt{5}]=2$，$[\sqrt{6}]=2$，$[\sqrt{7}]=2$，$[\sqrt{8}]=2$.

$[\sqrt{9}]=3,[\sqrt{10}]=3,[\sqrt{11}]=3,[\sqrt{12}]=3,[\sqrt{13}]=3,[\sqrt{14}]=3$，$[\sqrt{15}]=3.$

注意到有(2^2-1)个1，(3^2-2^2)个2，(4^2-3^2)个3，一般的有$(n+1)^2-n^2$个n，我们对前$m-k+1$项求和：

$[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+\cdots+[\sqrt{m-k-1}]=1\times(2^2-1)+2\times(3^2-2^2)+\cdots+(n-1)\times[n^2-(n-1)^2]$

显然有$[\sqrt{m-k}]+[\sqrt{m-k+1}]+\cdots+[\sqrt{m}]=(k+1)n.$

$$1\times(2^2-1)+2\times(3^2-2^2)+\cdots+(n-1)\times[n^2-(n^2-1)]$$

$$=\frac{2}{3}n^2-\frac{n^2}{2}-\frac{n}{6}.$$

这里的求和用到公式 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$

这样我们得到：

$$[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+\cdots+[\sqrt{m-k-1}]+[\sqrt{m-k}]+\cdots+[\sqrt{m}]$$

$$=\frac{2}{3}n^3-\frac{n^2}{2}-\frac{n}{6}+(k+1)n.$$

由于$m-k=n^2=[\sqrt{m}]^2$，$k=m-[\sqrt{m}]^2$，$n=[\sqrt{m}]$. 代入上式得

$$[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+\cdots+[\sqrt{m-k-1}]+[\sqrt{m-k}]+\cdots+[\sqrt{m}]$$

$$=\frac{2}{3}[\sqrt{m}]^3-\frac{[m]^2}{2}-\frac{[m]}{6}+(m-[\sqrt{m}]^2+1)[\sqrt{m}].$$

(4) $\frac{2}{3}[\sqrt{m}]^3-\frac{[\sqrt{m}]^2}{2}-\frac{[\sqrt{m}]}{6}+(m-[\sqrt{m}]^2+1)[\sqrt{m}]$

$$=\frac{2}{3}m\sqrt{m}-\frac{m}{2}+O(m^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

下面我们来证明.

$$\frac{2}{3}m\sqrt{m}-\frac{m}{2}-\frac{2}{3}[\sqrt{m}]^3+\frac{[\sqrt{m}]^2}{2}+\frac{[\sqrt{m}]}{6}-(m-[\sqrt{m}]^2+1)[\sqrt{m}]$$

$$=\frac{2}{3}m\sqrt{m}-\frac{2}{3}[\sqrt{m}]^3-\frac{m-[\sqrt{m}]^2}{2}+\frac{[\sqrt{m}]}{6}-m[\sqrt{m}]+[\sqrt{m}]^3-\sqrt{m}$$

$$=\frac{2}{3}m\sqrt{m}-\frac{2}{3}[\sqrt{m}]^3-m[\sqrt{m}]+[\sqrt{m}]^3-\frac{m-[\sqrt{m}]^2}{2}-\frac{5\sqrt{m}}{6}$$

$$=\frac{2}{3}m\sqrt{m}-\frac{2}{3}[\sqrt{m}]^3-m[\sqrt{m}]+[\sqrt{m}]^3-\frac{(\sqrt{m}-[\sqrt{m}])(\sqrt{m}+[\sqrt{m}])}{2}-\frac{5\sqrt{m}}{6}$$

$$=\frac{1}{3}(\sqrt{m}-[\sqrt{m}])\times(2m-\sqrt{m}[\sqrt{m}]-[\sqrt{m}]^2)+2[\sqrt{m}])-\frac{(\sqrt{m}-[\sqrt{m}])(\sqrt{m}+[\sqrt{m}])}{2}-\frac{5\sqrt{m}}{6}$$

$$=\frac{1}{3}(\sqrt{m}-[\sqrt{m}])^2\times(2\sqrt{m}+[\sqrt{m}]+2[\sqrt{m}])-\frac{(\sqrt{m}-[\sqrt{m}])(\sqrt{m}+[\sqrt{m}])}{2}-\frac{5\sqrt{m}}{6}$$

$$=O(m^{\frac{1}{2}+\epsilon}).$$

注意到 $0\leqslant\sqrt{m}-[\sqrt{m}]<1$，我们得到上面的结论.

由前面的结果有 $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{m}=\frac{2}{3}m\sqrt{m}+O(m^{\frac{1}{2}+\epsilon})$，我们证明了问题 1 猜想的结果：

$$K_m=\sqrt{1}-[\sqrt{1}]+\sqrt{2}-[\sqrt{2}]+\sqrt{3}-[\sqrt{3}]+\cdots+\sqrt{m}-[\sqrt{m}],$$

$$K_m=\frac{m}{2}+O(m^{\frac{1}{2}+\epsilon}).$$

就数学的直觉而言，一般都会猜想到 $K_m=\frac{m}{2}$，我们严格地证明了这个结论，也严格证明了误差项与猜测的一致.

但一般的问题呢?

(四)$\pi(m)=4(L_m-K_m)+1$ 的一个简单推导.

除原点(0,0)外,圆内整点数在第一象限、第二象限、第三象限、第四象限的整点数是相等的.下面仅考虑第一象限的整点数,x 轴方向的整点数包括在第一象限,y 轴方向的整点数包括在第二象限,设第一象限整点数为 $\pi_1(m)$.

$\pi_1(m)=[\sqrt{m^2-0^2}]+[\sqrt{m^2-1^2}]+[\sqrt{m^2-2^2}]+\cdots+[\sqrt{m^2-[m]^2}]$.

$[m]$表示 m 的整数部分.$[2.3]=2$,$[2]=[2]$.m 为圆内的半径.考虑原点(0,0)这个点有:

$\pi_1(m)=4([\sqrt{m^2-0^2}]+[\sqrt{m^2-1^2}]+[\sqrt{m^2-2^2}]+\cdots+[\sqrt{m^2-([m]-1)^2}])+1$.

这个公式是没有误差的,但实际上希望用有关 m 的函数来直接表示 $\pi(m)$,这样带来了一个误差项,高斯首先证明了一个公式 $\pi(m)=\pi m^2+O(m^{1+\varepsilon})$,但数学界猜测 $\pi(m)=\pi m^2+O(m^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$,这便是高斯圆内整点问题.

$L_m=\sqrt{m^2-0^2}+\sqrt{m^2-1}+\sqrt{m^2-2^2}+\cdots+\sqrt{m^2-([\sqrt{m}]-1)^2}+\sqrt{m^2-[m]^2}$.

$K_m=(\sqrt{m^2-0^2}-[\sqrt{m^2-0^2}])+(\sqrt{m^2-1^2}-[m^2-1^2])+(\sqrt{m^2-2^2}-[m^2-2^2])+\cdots+(\sqrt{m^2-([m]-1)^2}-[\sqrt{m^2-([m]-1)^2}])+(\sqrt{m^2-[m]}-[\sqrt{m^2-[m]}])$.

显见,$\pi(m)=4(L_m-K_m)+1$.

(五)$L_m=\sqrt{m^2-0^2}+\sqrt{m^2-1}+\sqrt{m^2-2^2}+\cdots+\sqrt{m^2-([m]-1)^2}$

$+\sqrt{m^2-[m]^2}$,

$$L_m=\frac{\pi}{4}m^2+\frac{m}{2}+O(m^{\frac{1}{2}+\epsilon}).$$

下面来证明这个结论：

(1) $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$.

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 a}\,\mathrm{d}\sin a=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 a\,\mathrm{d}a=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos^2 a}{2}\mathrm{d}a$$

$$=[\frac{a}{2}]_0^{\frac{\pi}{2}}+[\frac{\sin 2a}{4}]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ 实际上是求$\frac{1}{4}$个单位圆的面积，故$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$.

(2) $2\sqrt{1-(\frac{x_1+x_2}{2})^2}>\sqrt{1-x_1^2}+\sqrt{1-x_2^2}$, $0\leqslant x_1\leqslant 1$, $0\leqslant x_2\leqslant 1$, $x_1\neq x_2$.

$\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}$

$=\sqrt{1-x_1^2-x_2^2+x_1^2x_2^2}$

$=\sqrt{(1-x_1x_2)^2-x_1^2-x_2^2+2x_1x_2}$

$<1-x_1x_2$.

$2(1-x_1x_2)>2\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}$,

$2(1-x_1x_2)-x_1^2-x_2^2>2\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}-x_1^2-x_2^2$.

$4-2x_1x_2-x_1^2-x_2^2>2\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}-x_1^2-x_2^2+2$.

$4(1-(\frac{x_1+x_2}{2})^2)>2\sqrt{(1-x_2^2)(1-x_2^2)}+(\sqrt{1-x_1^2})^2+(\sqrt{1-x_2^2})^2$

$(2\sqrt{1-(\frac{x_1+x_2}{2})^2})^2>(\sqrt{1-x_1^2}+\sqrt{1-x_2^2})^2$,

$$2\sqrt{1-(\frac{x_1+x_2}{2})^2}>\sqrt{1-x_1^2}+\sqrt{1-x_2^2}.$$

这是用代数方法证明的，也可用微积分的性质或圆的几何方法得到这一结论.

(3) $L_m=\sqrt{m^2-0^2}+\sqrt{m^2-1^2}+\sqrt{m^2-2^2}+\cdots+\sqrt{m-([m]-1)^2}+\sqrt{m^2-[m]^2}$.

$$\frac{L_m}{m^2}=[\sqrt{1-(\frac{0}{m})^2}+\sqrt{1-(\frac{1}{m})^2}+\sqrt{1-(\frac{2}{m})^2}+\cdots+\sqrt{1-(\frac{[m]-1}{m})^2}+\sqrt{1-(\frac{[m]}{m})^2}]\frac{1}{m}.$$

m 为正整数时 $[m]=m$，L_m 共 $[m]$ 项，$\sqrt{m^2-[m]^2}=0$. m 为小数时，L_m 共 $[m]+1$ 项.

$\sqrt{1-(\frac{0}{m})^2}\times\frac{1}{m}$ 为长是 $\sqrt{1-(\frac{0}{m})^2}$，宽是 $\frac{1}{m}$ 的矩形的面积.

$\sqrt{1-(\frac{0}{m})^2}\times\frac{1}{m}$ 为长是 $\sqrt{1-(\frac{1}{m})^2}$，宽是 $\frac{1}{m}$ 的矩形的面积.

依次类推.

当 m 为整数时，矩形个数为 $[m]$ 个，当 m 为小数时矩形个数为 $[m]+1$ 个. $\frac{L_m}{m^2}$ 可视为这些矩形面积之和，所有相邻的矩形将 $\frac{1}{4}$ 个单位圆面积（或 $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ 的面积）盖住还有多的.

故 $\frac{L_m}{m^2}>\frac{\pi}{4}$.

面积为 $\sqrt{1-(\frac{0}{m})^2}\times\frac{1}{m}$ 的矩形在圆外部分的面积为 A_1，利用(2)的结论有 $A_1<\frac{1}{2}(\sqrt{1-(\frac{0}{m})^2}-\sqrt{1-(\frac{1}{m})^2})\frac{1}{m}$.

面积为$\sqrt{1-(\frac{0}{m})^2}\times\frac{1}{m}$的矩形在圆外部分的面积为$A_2$，

$A_2<\frac{1}{2}(\sqrt{1-(\frac{1}{m})^2}-\sqrt{1-(\frac{2}{m})^2})\frac{1}{m}$，依次类推.

$A_{[m]}<\frac{1}{2}(\sqrt{1-(\frac{[m]-1}{m})^2}-\sqrt{1-(\frac{[m]}{m})^2})\frac{1}{m}$.

$A_{[m]+1}<\frac{1}{2}(\sqrt{1-(\frac{[m]}{m})^2}-0)\frac{1}{m}$.

m 为正整数时，$\frac{[m]}{m}=1,\sqrt{1-(\frac{[m]}{m})^2}=0$，此时，

$A_1+A_2+\cdots+A_{[m]}<\frac{1}{2}\times\frac{1}{m}$.

m 为小数时，$A_1+A_2+\cdots+A_{[m]}<\frac{1}{2}\times\frac{1}{m}+\frac{1}{2}(\sqrt{1-(\frac{[m]}{m})^2}-0)\frac{1}{m}$.

$\frac{1}{2}(\sqrt{1-(\frac{[m]}{m})^2}-0)\frac{1}{m}=\frac{1}{2m}\sqrt{1-(\frac{[m]}{m})^2}<\frac{1}{2m}\sqrt{1-(\frac{m-1}{m})^2}$

$=\frac{1}{2m}\sqrt{\frac{2m-1}{m^2}}<\frac{1}{2m}\sqrt{\frac{2m}{m^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}m\sqrt{m}}$.

$\frac{L_m}{m^2}<\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2m}+\frac{1}{\sqrt{2}m\sqrt{m}}$.

$L_m<\frac{\pi}{4}m^2+\frac{m}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{m}$.

(4)下面证明 $L_m>\frac{\pi}{4}m^2+\frac{m}{2}-C\sqrt{m}$，$C$ 为正常数.

面积为$\sqrt{1-(\frac{0}{m})^2}\times\frac{1}{m}$的矩形与圆弧有两个交点，不妨设这两个交点为 M_1 和 Q_1，连接 M_1 和 Q_1，设 M_1Q_1 的中心为 P_1，将单位圆的圆心与 P_1 连接起来交圆弧于 G，设 $M_1Q_1=2l_1$，$P_1G=r$，显然，$r<1$. 由圆的定理有

$l_1\times l_1=r\times(2-r)$，$r^2-2r+l_1^2=0$，$r=1\pm\sqrt{1-l_1^2}$，$r<1$，取 $r=1-\sqrt{1-l_2^2}$.

设弦 M_1Q_1 与圆弧所夹面积为 S_1，则 $S_1<2l_1r$.

$$S_1>2l_1(1-\sqrt{1-l_1^2})=2l_1\times\frac{l_1^2}{1+\sqrt{1-l_1^2}}=\frac{2l_1^3}{1+\sqrt{1-l_1^2}}.$$

由于$\frac{1}{4}$个单位圆内所有的弦长都$\leqslant\sqrt{2}$，故所有弦长的一半都$\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$. $1+\sqrt{1-l_1^2}\geqslant1+\sqrt{1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$. $S_1<\frac{2l_1^3}{1+\sqrt{1-l_1^2}}\leqslant\frac{2\times2l_1^3}{2+\sqrt{2}}=\frac{4l_1^3}{2+\sqrt{2}}$. 设相邻的圆弧面积依次为 $S_2,S_3,\cdots,S_{[m]}$，m 为整数，所有矩形都与圆弧有两个交点，m 为小数，面积为$\sqrt{1-(\frac{[m]}{m})^2}\times\frac{1}{m}$的矩形是唯一的一个与圆弧只有一个交点的矩形.

m 为整数时，矩形面积之和

$$\frac{L_m}{m^2}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2m}-(S_1+S_2+\cdots+S_{[m]}),$$

m 为小数时，矩形的面积之和$\frac{L_m}{m^2}$满足下式，

$$\frac{L_m}{m^2}>\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2m}-(S_1+S_2+\cdots+S_{[m]})-\frac{1}{2}\sqrt{1-(\frac{[m]}{m})^2}\times\frac{1}{m}$$

$$>\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2m}-(S_1+S_2+\cdots+S_{[m]})-\frac{\sqrt{2}}{2m\sqrt{m}}.$$

无论 m 为整数还是为小数，下式成立，

$$\frac{L_m}{m^2}>\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2m}-(S_1+S_2+\cdots+S_{[m]})-\frac{\sqrt{2}}{2m\sqrt{m}}.$$

(5) $S_1<\frac{4l_1^3}{2+\sqrt{2}}$.

设与弦 M_1Q_1 相邻的弦长依次为 $2l_1,2l_2,\cdots,l_k,\cdots,l_{[m]}$，同样地 $S_2<$

$\frac{4l_2^3}{2+\sqrt{2}}, S_3<\frac{4l_3^3}{2+\sqrt{2}}, \cdots, S_k<\frac{4l_k^3}{2+\sqrt{2}}, \cdots, S_{[m]}<\frac{4l_{[m]}^3}{2+\sqrt{2}}$.

$$S_1+S_2+S_3+\cdots+S_k+\cdots+S_{[m]}$$

$$<\frac{4}{2+\sqrt{2}}(l_1^3+l_2^3+l_3^3+\cdots+l_k^3+\cdots+l_{[m]}^3).$$

(6)下面求 $l_1, l_2, l_3, \cdots, l_k, \cdots, l_{[m]}$.

$$2l_1=\sqrt{(\frac{1}{m})^2+(\sqrt{1-(\frac{0}{m})^2}-\sqrt{1-(\frac{1}{m})^2})^2},$$

$$2l_2=\sqrt{(\frac{1}{m})^2+(\sqrt{1-(\frac{1}{m})^2}-\sqrt{1-(\frac{2}{m})^2})^2},$$

$$2l_3=\sqrt{(\frac{1}{m})^2+(\sqrt{1-(\frac{2}{m})^2}-\sqrt{1-(\frac{3}{m})^2})^2},$$

$$2l_k=\sqrt{(\frac{1}{m})^2+(\sqrt{1-(\frac{k-1}{m})^2}-\sqrt{1-(\frac{k}{m})^2})^2},$$

$$2l_{[m]}=\sqrt{(\frac{1}{m})^2+(\sqrt{1-(\frac{[m]-1}{m})^2}-\sqrt{1-(\frac{[m]}{m})^2})^2},$$

$$2l_k=\sqrt{(\frac{1}{m})^2+(\sqrt{1-(\frac{k-1}{m})^2}-\sqrt{1-(\frac{k}{m})^2})^2}$$

$$=\sqrt{(\frac{1}{m})^2+(\sqrt{(1+\frac{k-1}{m})(1-\frac{k-1}{m})}-\sqrt{(1+\frac{k}{m})(1-\frac{k}{m})})^2}.$$

当$\sqrt{1-(\frac{k-1}{m})^2}-\sqrt{1-(\frac{k}{m})^2}<\frac{1}{m}$时，$2l_k<\sqrt{(\frac{1}{m})^2+(\frac{1}{m})^2}=\frac{\sqrt{2}}{m}$，

$l_k<\frac{\sqrt{2}}{2m}$.

当$\sqrt{1-(\frac{k-1}{m})^2}-\sqrt{1-(\frac{k}{m})^2}>\frac{1}{m}$时，

$$2l_k<\sqrt{2(\sqrt{1-(\frac{k-1}{m})^2}-\sqrt{1-(\frac{k}{m})^2})^2}.$$

$$2l_k<\sqrt{2}\left(\sqrt{1-\left(\frac{k-1}{m}\right)^2}-\sqrt{1-\left(\frac{k}{m}\right)^2}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\sqrt{\left(1+\frac{k-1}{m}\right)\left(1-\frac{k-1}{m}\right)}-\sqrt{\left(1+\frac{k}{m}\right)\left(1-\frac{k}{m}\right)}\right)$$

$$<\sqrt{2}\left(\sqrt{\left(1+\frac{k}{m}\right)\left(1-\frac{k-1}{m}\right)}-\sqrt{\left(1+\frac{k}{m}\right)\left(1-\frac{k}{m}\right)}\right)$$

$$=\sqrt{2}\times\sqrt{1+\frac{k}{m}}\times\left(\sqrt{1-\frac{k-1}{m}}-\sqrt{1-\frac{k}{m}}\right)$$

由于 $k\leqslant m, 1+\frac{k}{m}\leqslant 2, 2l_k<\sqrt{2}\times\sqrt{2}\left(\sqrt{1-\left(\frac{k-1}{m}\right)}-\sqrt{1-\frac{k}{m}}\right)$.

$$l_k<\sqrt{1-\frac{k-1}{m}}-\sqrt{1-\frac{k}{m}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{m}}\left(\sqrt{m+1-k}-\sqrt{m-k}\right).$$

$$l_1^3+l_2^3+l_3^3+\cdots+l_k^3+\cdots+l_{[m]}^3$$

$$<\left(\frac{\sqrt{2}}{2m}\right)^3\times[m]+\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)^3\left[\left(\sqrt{m}-\sqrt{m-1}\right)^3+\left(\sqrt{m-1}-\sqrt{m-2}\right)^3+\right.$$
$$\left(\sqrt{m-2}-\sqrt{m-3}\right)^3+\cdots+\left(\sqrt{m+1-k}-\sqrt{m-k}\right)^3+\cdots+\left(\sqrt{m+1-[m]}\right.$$
$$\left.\left.-\sqrt{m-[m]}\right)^3\right].$$

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2m}\right)[m]\leqslant\left(\frac{\sqrt{2}}{2m}\right)^3 m=\frac{\sqrt{2}}{4m^2}$. m 为整数时，$[m]=m$，

$$l_1^3+l_2^3+l_3^3+\cdots+l_k^3+\cdots+l_{[m]}^3$$

$$<\frac{\sqrt{2}}{4m^2}+\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)^3\left[\left(\sqrt{m}-\sqrt{m-1}\right)^3+\left(\sqrt{m-1}-\sqrt{m-2}\right)^3+\left(\sqrt{m-2}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\sqrt{m-3}\right)^3+\cdots+\left(\sqrt{m+1-k}-\sqrt{m-k}\right)^3+\cdots+\left(\sqrt{2}-1\right)^3+\left(\sqrt{1}-\sqrt{0}\right)^3\right].$$

设 $S_m=\frac{1}{\left(\sqrt{m}+\sqrt{m-1}\right)^3}+\cdots+\frac{1}{\left(\sqrt{m+1-k}+\sqrt{m-k}\right)^3}+\cdots+$

$$\frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{1})^3}+\frac{1}{(\sqrt{1}+\sqrt{0})^3}$$

$$<\frac{1}{(2\sqrt{m-1})^3}+\cdots+\frac{1}{(2\sqrt{m-k})^3}+\cdots+\frac{1}{(2\sqrt{1})^3}+1$$

$$=1+\frac{1}{8}(\frac{1}{(\sqrt{1})^3}+\frac{1}{(\sqrt{2})^3}+\cdots+\frac{1}{(\sqrt{m-k})^3}+\cdots+\frac{1}{(\sqrt{m-1})^3}$$

$$<1+\frac{1}{8}[\frac{1}{(\sqrt{1^2})^3}(2^2-1^2)+\frac{1}{(\sqrt{2^2})^3}(3^2-2^2)+\frac{1}{(\sqrt{3^2})^3}(4^2-3^2)+\cdots]$$

$$=1+\frac{1}{8}[\frac{1}{1^3}(2^2-1^2)+\frac{1}{2^3}](3^2-2^2)+\frac{1}{3^3}(4^2-3^2)+\cdots]$$

$$=1+\frac{1}{8}[\frac{1}{1^3}(2\times1+1)+\frac{1}{2^3}(2\times2\times1)+\frac{1}{3^2}(2\times3+1)\cdots]$$

$$=1+\frac{1}{8}[2(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots)+(\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots)]<1+\frac{1}{8}\times3\times\frac{\pi^2}{6}$$

$$=1+\frac{\pi^2}{16}$$

m 为小数时，

$$S_m=(\sqrt{m}-\sqrt{m-1})^3+(\sqrt{m-1}-\sqrt{m-2})^3+\cdots+(\sqrt{m+1-[m]}-\sqrt{m-[m]})^3$$

$$=\frac{1}{(\sqrt{m}+\sqrt{m-1})^3}+\frac{1}{(\sqrt{m-1}+\sqrt{m-2})^3}+\cdots$$

$$+\frac{1}{(\sqrt{m+1-[m]}+\sqrt{m-[m]})^3}$$

$$<\frac{1}{(\sqrt{m})^3}+\frac{1}{(\sqrt{[m]}-1)^3}+\cdots+\frac{1}{(\sqrt{1})^3}$$

$$<3\times\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{2}.$$

由于$\frac{\pi^2}{2}>1+\frac{\pi}{16}$，对 $m>0$ 都有：

$$l_1^3+l_2^3+l_3^3+\cdots+l_k^3+\cdots+l_{[m]}^3<\frac{\sqrt{2}}{4m^2}+(\frac{1}{\sqrt{m}})^3\times\frac{\pi^2}{2}.$$

$$S_1+S_2+S_3+\cdots+S_k+\cdots+S_{[m]}$$

$$<\frac{4}{2+\sqrt{2}}(l_1^3+l_2^3+l_3^3+\cdots+l_k^3+\cdots+l_{[m]}^3)$$

$$<\frac{4}{2+\sqrt{2}}[\frac{\sqrt{2}}{4m^2}+(\frac{1}{\sqrt{m}})^3\times\frac{\pi^2}{2}]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}+1}\times\frac{1}{m^2}+\frac{2\pi^2}{2+\sqrt{2}}\times\frac{1}{m\sqrt{m}}.$$

$$\frac{L_m}{m^2}>\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2m}-(S_1+S_2+\cdots+S_{[m]})-\frac{\sqrt{2}}{2m\sqrt{m}}$$

$$>\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2m}-(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\times\frac{1}{m^2}+\frac{2\pi^2}{2+\sqrt{2}}\times\frac{1}{m\sqrt{m}})-\frac{\sqrt{2}}{2m\sqrt{m}}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2m}-\frac{\sqrt{2}+1+4\pi^2}{4+2\sqrt{2}}\times\frac{1}{m\sqrt{m}}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\times\frac{1}{m^2}$$

$$L_m>\frac{\pi m^2}{4}+\frac{m}{2}-\frac{\sqrt{2}+1+4\pi^2}{4+2\sqrt{2}}\sqrt{m}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}.$$

$$m\geqslant 1,\frac{1}{1+\sqrt{2}}\leqslant\frac{1}{1+\sqrt{2}}\sqrt{m}.$$

$$L_m>\frac{\pi}{4}m^2+\frac{m}{2}-\frac{\sqrt{2}+1+4\pi^2}{4+2\sqrt{2}}\sqrt{m}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\sqrt{m}$$

$$>\frac{\pi}{4}m^2+\frac{m}{2}-\frac{7\pi}{3}\sqrt{m}.$$

$$\frac{\sqrt{2}+1+4\pi^2}{4+2\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+1}<\frac{7\pi}{3}.$$

(7) $L_m=\frac{\pi}{4}m^2+\frac{m}{2}+O(m^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$已经证明了. 如果 $K_m=\frac{m}{2}+O(m^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$

中，显然有 $\pi(m)=4(L_m-K_m)+1=4(\frac{\pi}{4}m^2+\frac{m}{2}-\frac{m}{2})+O(m^{\frac{1}{2}+\varepsilon})=\pi m^2+O(m^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$. 在证明了 L_m 的公式之后，高斯圆内整点问题已经等价于对 $K_m=\frac{m}{2}+O(m^{\theta+\varepsilon})$ 中余项 $R(m)$ 的估值. 而 $R(m)$ 的估值涉及许多类似的问题，这表明圆内整点问题并非一个孤立的数学问题.

二、圆内整点问题的推广

类似圆内整点问题，有所谓球内整点问题. 数学家证明了：

$\pi(r)=\frac{4}{3}\pi r^3+O(r^{\theta+\varepsilon})$.

存在的问题是 θ 的最小值是不是 1？1963 年，前苏联数学家维诺格拉多夫(Vinogradov)证明了 $\theta=\frac{4}{3}$.

$\pi(r)$ 表示落在椭圆 $ax^2+by^2\leqslant r$ 中的整点数，

$\pi(r)=\frac{\pi}{\sqrt{ab}}r+O(r^{\frac{1}{4}+\varepsilon})$？

$\pi(r)$ 表示落在椭球 $ax^2+by^2+cz^2\leqslant r$ 中的整点数，

$\pi(r)=\frac{4\pi}{3\sqrt{abc}}r^{\frac{3}{2}}+O(r^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$？

当然，圆内整点问题可以推广到平面的任何用函数定义的一个封闭区域，也可推广到三维空间的任何用函数定义的一个封闭区域.

边长为 a 的正方形的整点数为 $\pi(a)$，可以严格证明：

$\pi(a)=a^2+O(a^{1+\varepsilon})$.

它的误差项的次数与圆的不同，一个为 1，一个是 $\frac{1}{2}$.

三、代数问题与几何问题的相互转化

$x_1^2+x_2^2\leqslant m^2$ 有多少组整数解？$m>0$. 这个问题等价于半径为 m 的圆内有多少组整点.

$x_1^2+x_2^2+x_m^2\leqslant m^2$ 有多少组整数解？这个问题等价于半径为 m 的球内有多少组整点.

$x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2\leqslant m^2$，有多少组整数解？$n\geqslant 4$ 时，没有一个直观的几何问题与之对应.

我们利用微积分的知识可以得到 n 个未知数时有多少组整数解.

设 n 个未知数时有 $S_n(m)$ 组整数解，那么，

$$S_n(m)\sim 2^n m^n\int_0^1(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_0^1(1-x^2)^{\frac{2}{2}}\mathrm{d}x\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\cdots\int_0^1(1-x^2)^{\frac{(n-1)}{2}}\mathrm{d}x.$$

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{2^n m^n\int_0^1(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_0^1(1-x^2)^{\frac{2}{2}}\mathrm{d}x\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\cdots\int_0^1(1-x^2)^{\frac{(n-1)}{2}}\mathrm{d}x}{S_n(m)}=1.$$

$n=2$，$S_2(m)\sim\pi m^2$. 与圆内整点的结果一致.

$n=3$，$S_3(m)\sim\dfrac{4}{3}\pi m^3$. 与球内整点的结果一致.

$n=4$，$S_4(m)\sim\dfrac{\pi^2}{2}m^4$. $n=4$，$S_5(m)\sim\dfrac{7\pi^2}{12}m^5$.

$n=1$，$S_1(m)\sim 2m$. $x_1^2\leqslant m^2$，显然公式成立.